数学名著译丛

元数学导论

上册

数学名著译丛

元数学导论

〔美〕S. C. 克林 著

莫绍揆 译

科学出版社

1985

内 容 简 介

本书是数理逻辑方面的一本名著，既概括了数学基础的主要内容，也概括了这方面所产生的若干基本方向。本书为数理逻辑和递归函数论提供一个有系统的导论，也为更新的数学基础的探讨提供一个有系统的导论.

本书可供高等学校数学系师生以及有关研究人员参考.

S. C. Kleene

INTRODUCTION TO METAMATHEMATICS

Van Nostrand

数学名著译丛

元 数 学 导 论

〔美〕S. C. 克林 著

莫绍揆 译

责任编辑 杨贤英

科 学 出 版 社 出 版

北京朝阳门内大街137号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1985年 9月第 一 版 开本：850×1168 1/32

1985年 9月第一次印刷 印张：14 5/8

印数：0001—6,000 字数：381,000

统一书号：13031·2971

本社书号：4032 13—1

定价：4.10 元

目　录

第一部分　数学基础问题

第一章　集论……………………………………………… 1

§1.　可数集……………………………………………… 1

§2.　康托的对角线法……………………………………… 4

§3.　基数………………………………………………… 7

§4.　等价定理，有穷集与无穷集…………………………… 9

*§5.　更高的超穷基数…………………………………… 13

第二章　若干基本概念……………………………………… 18

§6.　自然数……………………………………………… 18

§7.　数学归纳法………………………………………… 20

§8.　客体系统…………………………………………… 24

*§9.　数论与解析学……………………………………… 29

§10.　函数………………………………………………… 32

第三章　数学推理的批判…………………………………… 36

§11.　悖论………………………………………………… 36

§12.　由悖论得出的一些初步推论………………………… 40

§13.　直觉主义…………………………………………… 47

§14.　形式主义…………………………………………… 55

§15.　一理论的形式体系化……………………………… 62

第二部分　数 理 逻 辑

第四章　形式体系…………………………………………… 70

§16.　形式符号…………………………………………… 70

§17.　形成规则…………………………………………… 73

§18.　自由变元与约束变元……………………………… 77

§19. 变形规则…………………………………………………… 82
第五章 形式推演…………………………………………………… 88
§20. 形式推演…………………………………………………… 88
§21. 推演定理…………………………………………………… 92
§22. 推演定理(续完)…………………………………………… 97
§23. 逻辑符号的引入与消去…………………………………… 101
*§24. 依赖性及变化性…………………………………………… 106
第六章 命题演算…………………………………………………… 113
§25. 命题字母公式……………………………………………… 113
§26. 等价性,替换 ……………………………………………… 118
§27. 等价式,对偶原则 ………………………………………… 124
§28. 赋值,无矛盾性 …………………………………………… 131
§29. 完备性,范式 ……………………………………………… 138
§30. 判定过程,解释 …………………………………………… 144
第七章 谓词演算…………………………………………………… 151
§31. 谓词字母公式……………………………………………… 151
§32. 导出规则,自由变元 ……………………………………… 155
§33. 替换………………………………………………………… 161
*§34. 代入………………………………………………………… 165
§35. 等价式,对偶性,前束式…………………………………… 174
§36. 赋值,无矛盾性 …………………………………………… 181
*§37. 集论式的谓词逻辑,k 变换 ……………………………… 187
第八章 形式数论…………………………………………………… 195
§38. 归纳,相等性,替换………………………………………… 195
§39. 加法,乘法,次序…………………………………………… 200
*§40. 数论的进一步发展………………………………………… 205
§41. 形式计算…………………………………………………… 211
§42. 哥德尔定理………………………………………………… 223

第一部分　数学基础问题

第一章　集　　论

§1. 可　数　集

在讨论我们的主要内容之前，最好先简单地介绍一下康托(Cantor)的集论.

四只羊的羊群与四株树的小林可以彼此用一种方式相联系，而它们和三块石头的石堆或者七株树的小林之间却绝不能用同样的方式来联系. 虽则在纸上叙述这一不说自明的事实的时候，我们已经用了数目这样的字眼，但我们所说的关系却是形成基数这个概念的基础. 人们可以不去计数羊和树，而把它们彼此配对，例如把羊扎到树去，使得每一羊每一树都恰巧只属于一对. 把含有客体的两个集的元素作这样配对的方式叫做一一对应.

1638 年伽里略 (Galileo) 注意到正整数的平方可以和正整数本身配成一一对应，即

$$1, 4, 9, 16, \cdots, n^2, \cdots$$
$$1, 2, 3, \ \ 4, \cdots, n, \cdots$$

尽管依照古老的公理，全体是大于它的任何一部分的. 在 1874 年与 1897 年之间，康托根据建立一一对应的可能性，有系统地对无穷集加以比较.

在伽里略"悖论"中的两个集以及自然数集[1)]

$$0, 1, 2, 3, \cdots, n-1, \cdots$$

都是"可数的"无穷集的例子. 若把最后这个集取作标准，我们可

1) 通常所谓自然数是指正整数，但本书所说的自然数兼包括 0 (即非负整数)——译者注.

以定义说，如果一无穷集可以与自然数建立一一对应，则它便叫做可数的(或可排的，可枚举的)．

要说明一无穷集是可数的，只须指出它的元素可以排成(不重复)一个‘无穷表册’，然后，在表册中的第一个便对应于0，第二个对应于1，以此类推．虽则表册本身是无穷的，但每一个元素在表册中都占一个有限的位置．

对一集的元素所作的一个特定的无穷表册(不重复的)，或这个集的元素与自然数之间的一一对应，就可叫做这个集的一个枚举；一元素所对应的自然数就叫做该元素在枚举中的指标．

有穷集的元素亦可以作成表册，即有穷表册．因此，可数的这个字眼除指那些可数无穷集以外，有时亦兼用于有穷集．

整数集是可数的，只须依如下次序列成表册即可，

$$0,\ 1,\ -1,\ 2,\ -2,\ 3,\ -3,\ \cdots$$

有理数集亦是可数的，如果我们依照通常的代数上的大小次序而把它和整数集相比较，这是一件很可惊异的事情．在 x 轴上整数点是孤立的，而有理点则是‘到处稠密的’，即不管两有理点如何相近，其间还有这种点．但这个枚举却可以用一些方法完成，这里只就正有理数而作出，对全体有理数的情形，读者可自行为之．设把正分数列成一个无穷方阵，如下

1/1　1/2→1/3　1/4→···

2/1　2/2　2/3　2/4　···

3/1　3/2　3/3　3/4　···

4/1　4/2　4/3　4/4　···

··················

然后顺箭头而枚举各分数．正有理数是能够表成带有正整数分子和分母的分数形式的．试枚举出所有的分数，若一分数的值与前面的相同，则把该分数删除．这样，我们便得到正有理数的一个枚举如下：

$$1,\ 2,\ 1/2,\ 1/3,\ 3,\ 4,\ 3/2,\ 2/3,\ 1/4,\ \cdots$$

这种方阵方法是个一般方法，可用以枚举由可数集的元素所作成的有序对偶，例如，自然数的有序对偶或整数的有序对偶等．方阵的每一行可用以枚举第一元素为固定的那些对偶．由可数集的元素而成的有序三元组可如下枚举，再一次使用方阵法，其各行都是对第一元素为固定的那些三元组的依上法而作的枚举．逐步地我们可以枚举对于每个确定的正整数 n，由可数集的元素所组成的 n 元组．所有这些枚举，包括原有可数集本身的枚举，可用以作为一个新方阵的各行，因而得到一个 n 元组（n 是可变的）的枚举，即得到一个可数集元素的有穷序列的枚举．

这个结果可用以得到具有整系数的代数方程的枚举，

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0 \quad (a_0 \neq 0)$$

因为每个方程都可用它的已给的系数序列

$$(a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}, a_n)$$

来描述．“(实)代数数”便是这种方程的实根．因为每个给定的方程至多有 n 个不同的根，故代数数是可数的．

还有别的方法可以阐明枚举某些集的可能．在处理一个可数集(有穷或无穷)时，在某一特定的枚举中各元素所对应的自然数，可用作各个元素的记号或名称．反之，如果在一个预先指定的并且不含混的记号系统中，一集每个元素都对应于一个名称或一个明显的表达式，那么该集(有穷或无穷)便是可数的．这里，我们并约定：所谓一个名称或一表达式是指一个有穷的符号序列，各符号均由给定的可用符号的有穷字母表中选出来的．例如，整系数的代数方程可对系数及指数采用十进记法而写出．指数写在 x 的右上方这种记法无关重要，它可用适当的约定而消去之．其实，要是我们只限于讨论这些方程，那末简单地把指数和 x 写在同一行是可以的．由此所需的符号恰好有如下一些：

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, x, +, -, =,$$

在方程中第一个符号不是 0．我们再把这些符号看作是十四进位系统中的数字记号 (digit)（十四进位法以 14 为底，正如十进法以

10 为底一样）．这时每一个方程都变成一个自然数（不同的方程变成不同的自然数）．我们可以依照这些数的大小而枚举方程式了．

§2. 康托的对角线法

数学中所讨论的无穷集中有些是不可数的，这可由康托的有名的‘对角线法’而得到证明，实数集便是不可数的．

让我们先讨论在区间 $0 < x \leqslant 1$ 中的实数 x．在这区间内每个实数都可以唯一地表成一个真无穷十进小数，即它的第一个有效数字在小数点之右；并且有无穷多个非 0 数字．一数当然可以表成一个有穷十进小数，即依 0 重复的[1]，但这个小数可换成无穷小数，依 9 重复[1]．例如，0.483 或 0.483000···可换成 0.482999···．反之，每个真无穷十进小数都表示该区间内唯一的一个实数．

今设

$$x_0,\ x_1,\ x_2,\ x_3,\cdots$$

是该区间内的一些实数但未必是全体实数的一个无穷表册或一个枚举．今依次写下与它们相应的无穷十进小数，

$$\begin{array}{l}
0.x_{00}\ \ x_{01}\ \ x_{02}\ \ x_{03}\cdots\\
0.x_{10}\ \ x_{11}\ \ x_{12}\ \ x_{13}\cdots\\
0.x_{20}\ \ x_{21}\ \ x_{22}\ \ x_{23}\cdots\\
0.x_{30}\ \ x_{31}\ \ x_{32}\ \ x_{33}\cdots\\
\cdots\cdots\cdots
\end{array}$$

依箭头所示选出对角小数．我们把每个数字 x_{nn} 换成另外一个不同的数字 x'_{nn}，但须避免产生有穷小数．例如，可令 $x'_{nn}=5$ 如果 $x_{nn}\neq 5$，而 $x'_{nn}=6$ 如果 $x_{nn}=5$．

1) “依 0（或依 9）重复”指从某一数位起，以后各位数字全为 0（或 9）——译者注．

结果所得的小数

$$0.x'_{00}x'_{11}x'_{22}x'_{33}\cdots$$

便表示该区间内一个实数 x 但却不在上述枚举之内。因为这小数与所给的第一个小数相差在小数点后第一位，与第二个小数相差在小数点后第二位，与第三个小数相差在小数点后第三位，等等。

因此，所给的枚举并非该区间内所有实数的枚举。对该区间内所有实数的枚举是不存在的。

要把对角线方法应用于实数而不限于区间 $0 < x \leqslant 1$ 内，只须把实数表成首数加尾数的样子，即 $37.142\cdots = 37 + 0.142\cdots$，$-2.813\cdots = -3 + 0.186\cdots$，然后把对角线法应用到尾数去便成了。

因此显然，在有理数集或代数数集为一方与实数集为另一方之间揭示了一个本质的差异。

注意到康托在[1874]年的发现(见文献)如何地阐明了刘维尔(Liouville) 早在 1844 年的发现，那是有历史意义的。刘维尔已经能够用一个特殊的方法而作出一些超越(即非代数数)实数来。康托的对角线方法却把超越的存在只由上述的极一般的考虑而看得十分清楚，事实上，对代数数任作一种枚举 $x_0, x_1, x_2, x_3, \cdots$，都可由对角线方法而作出一些个别的超越数来。

(实)超越数是不可数的。因为，如果它们和代数数一样是可数的，那末把这两集的枚举联合起来就可以取得所有的实数的枚举了。因此，在一定意义上说，大部分实数是超越数。

不可数集的另一个例子是(单值)函数集，它的定义域及值域都是可数集。为确定起见，试讨论以自然数为主目以自然数为值的函数集(或由自然数组成的无穷序列集)。再设对它们的一些但未必全体作一个枚举

$$f_0(n),\ f_1(n),\ f_2(n),\ f_3(n),\ \cdots$$

今依次地写出各个函数的值序列，以它们为各行而作成一无穷方

阵

$$\begin{array}{lllll} f_0(0), & f_0(1), & f_0(2), & f_0(3), & \cdots \\ f_1(0), & f_1(1), & f_1(2), & f_1(3), & \cdots \\ f_2(0), & f_2(1), & f_2(2), & f_2(3), & \cdots \\ f_3(0), & f_3(1), & f_3(2), & f_3(3), & \cdots \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots & & & \end{array}$$

今取在对角线上的值序列，把这些值全部改成别的值，例如，每值都加上1. 以结果所得的值序列作为 $f(n)$ 的值，即令

$$f(n)=f_n(n)+1,$$

则 $f(n)$ 不属于这枚举之内，因为它与第一个被枚举的函数在0处所取的值不同，与第二个函数在1处所取的值不同，等等.

这论证又可另述如下. 假若 $f(n)$ 会在这枚举之内，即若有某个自然数 q 使得对于每个自然数 n 均有

$$f(n)=f_q(n).$$

今把这式中及前式中的变元 n 代以自然数 q，则得

$$f(q)=f_q(q)=f_q(q)+1.$$

这是不可能的，因为自然数 $f_q(q)$ 不可能等于它自己加1.

还有一个不可数集的例子，那便是各种自然数集的集.（但有穷自然数集的集却是可数的，为什么?）我们可用一个代表函数来表示某自然数集，即在属于该集的自然数处它取值0，在不属于该集的自然数处它取值1. 某自然数集的代表函数的值的序列便是由0与1所组成的无穷序列. 例如，设该集包含自然数0，2，3，但不包含1与4，则该值序列将从01001…开始. 今把这些值序列取作无穷方阵的行，对于对角线上的数值的改换，将是0与1相互对换.

这几个不可数集能不能彼此作一一对应呢? 还有没有其他类型的无穷集? 读者可试自行作答(答案见§5). 现在我们考察康托理论的一般表述.

§3. 基　数

康托的'抽象集'的理论是论述一般集的(他亦给出'点集'理论). 康托把集与元素描述如下. "所谓一'集'是指我们感觉中或思想中一些确定的彼此完全有区别的客体 m——它们将叫做该集的'元素'——的总合而考虑为一个整体 M"([1895], p.481).

集有所谓空集(或零集),即没有元素的集,以及幺集,它们只含有一元素. 空集记为 O; 由单个元素 a 所组成的幺集记为 $\{a\}$; 以 $a, b, c, \cdots$ 为元素的集记为 $\{a, b, c, \cdots\}$.

一集亦可称为集合、集体、类、域或总合 (aggregate, collection, class, domain, totality). a 为 M 的元素亦可说 a 是 M 的分子, 或 a 属于 M, 或 a 在 M 中, 或记为 $a \in M$. 如果 a 不是 M 的元素, 可记为 $a \notin M$.

如果两集 M 与 N 有相同的元素, 亦即对于任何客体 a, $a \in M$ 当且仅当 $a \in N$, 则说集 M 与 N 相同, 记为 $M = N$.

如果两集 M 与 N 之间有一一对应(§ 1), 则说集 M 与 N 等价 (记为 $M \sim N$). (有时我们用"对应 $M \sim N$"指 M 与 N 间的一个特殊的一一对应, 如果 $M \sim N$ 的话, 这种对应是必然存在的.)

关系 $M \sim N$ 显然是自反的, 对称的和可传的, 即, 对于任意的 M, N, 与 P, 必有: $M \sim M$. 如果 $M \sim N$, 则 $N \sim M$. 如果 $M \sim N$ 及 $N \sim P$, 则 $M \sim P$.

一集 M 的基数是作为某一客体 $\overline{\overline{M}}$ 而引入的, 这个客体连系着所有与 M 等价的 (包括 M 自己) 那些集也只有那些集. 照这定义, $\overline{\overline{M}} = \overline{\overline{N}}$ 当且仅当 $M \sim N$.

除此之外, 基数究竟是什么, 这个问题大概是无关重要的; 但我们可以给出一些解释. 康托是这样说的: "当我们从一集 M 出发, 对它的各种元素的性质及次序作抽象以后, 借助于我们的理智而得出一个公共概念, 这概念我们便叫做集 M 的'势'或'基数'". 这是双重抽象, 所以他对 M 的基数用符号 $\overline{\overline{M}}$ 来暗示这个双重抽象。弗

雷格（Frege）[1884]和罗素（Russell）[1902]都把基数$\overline{\overline{M}}$看作等价于M的集所组成的集；冯诺曼（von Neumann）[1928]则从这些集的集（‘等价类’）中挑出一个特定的集来作为这类集中任一个集的基数.

集的‘部分’这个概念可由如下定义引入．如果集M_1的每个元素都是M的一个元素，那末M_1叫做M的子集（部分集），记为$M_1 \subset M$.

例1 三个元素a, b, c，所成的集$\{a, b, c\}$有八个($=2^3$)子集：O，$\{a\}$，$\{b\}$，$\{c\}$，$\{a, b\}$，$\{a, c\}$，$\{b, c\}$，$\{a, b, c\}$.

注意，集M的子集是包括空集O及集M自己的．集M自己叫做假子集，其它的子集叫做真子集．显然，如果$M_2 \subset M_1$及$M_1 \subset M$（省写为$M_2 \subset M_1 \subset M$），则$M_2 \subset M$.

两集M与N的并集或和$M+N$是由至少属于M或N之一的（即或属于M或属于N的）那些客体所组成的集；而其交集或积$M \cdot N$则是由同时属于M及N的（即属于M又属于N的）那些客体所组成的集．两集以上的并及交准此．M与N的差集$M-N$（当$N \subset M$时亦叫做N关于M的补集）是由属于M但不属于N的客体所组成的集.

例2 $\{a, b, c\}+\{b, d\}=\{a, b, c, d\}$，$\{a, b, c\} \cdot \{b, d\}=\{b\}$，$\{a, b, c\}-\{b, d\}=\{a, b, c\}-\{b\}=\{a, c\}$.

显然，$M-M_1 \subset M$；又当且仅当$M_1 \subset M$，则$M_1+(M-M_1)=M$．如果两集M与N没有公共元素，即如果$M \cdot N=O$，则说M与N不相交．例如，M_1与$M-M_1$是不相交的．如果M与N不相交，则或者$M \neq N$或$M=N=O$.

现在再讨论一个重要问题，即两基数的比较．设给出两集M与N，那末有或者没有N的某一子集N_1，使它与M成一一对应；反之，有或者没有M的一个子集M_1，使它与N成一一对应．结合这两对可能选择我们一共有四个情形，在任何两集M与N之间必恰巧只有一个情形成立：

(1a) 有N_1使$M \sim N_1 \subset N$；但没有M_1使$N \sim M_1 \subset M$.

(1b) 没有 N_1 使 $M \sim N_1 \subset N$;但有 M_1 使 $N \sim M_1 \subset M$.

(2) 有 N_1 使 $M \sim N_1 \subset N$; 有 M_1 使 $N \sim M_1 \subset M$.

(3) 没有 N_1 使 $M \sim N_1 \subset N$; 没有 M_1 使 $N \sim M_1 \subset M$.

如果是情形 (1a), 我们说集M的基数小于集N的基数(记为 $\bar{\bar{M}} < \bar{\bar{N}}$). 要把"<"当作在基数$\bar{\bar{M}}$与$\bar{\bar{N}}$之间的关系而不仅是在集$M$与$N$之间的关系,我们必须指出,如果 $M' \sim M$ 及 $N' \sim N$,则情形 (1a) 可以适用于集 M', N' 当且仅当它可以适用于集 M, N.

基数间的次序关系是可传的,即对于任何三个基数 $\bar{\bar{M}}, \bar{\bar{N}}, \bar{\bar{P}}$: 如果 $\bar{\bar{M}} < \bar{\bar{N}}$ 及 $\bar{\bar{N}} < \bar{\bar{P}}$, 则 $\bar{\bar{M}} < \bar{\bar{P}}$.

我们定义: 如果 $\bar{\bar{N}} < \bar{\bar{M}}$,则 $\bar{\bar{M}} > \bar{\bar{N}}$. 因此恰巧当情形(1b)时有 $\bar{\bar{M}} > \bar{\bar{N}}$. 至于关系 $\bar{\bar{M}} = \bar{\bar{N}}$,即 $M \sim N$, 显然是情形(2)的特例,这里,只需把N_1 及 M_1 取作假子集便成了. 因此, 对任何两基数 $\bar{\bar{M}}$ 及 $\bar{\bar{N}}$ 而言,$\bar{\bar{M}} < \bar{\bar{N}}$, $\bar{\bar{M}} = \bar{\bar{N}}$ 及 $\bar{\bar{M}} > \bar{\bar{N}}$ 这三个关系是'互斥'的,即不能有多于一个关系成立.

在未讨论到该理论的高级阶段(见 § 5)以前,很难看出这三个关系是否是'穷举的', 即是否这三关系中至少有一成立. 借助于下一定理这问题可以得到部分的澄清,以后的问题只在于情形(3)是否会出现了.

§ 4. 等价定理,有穷集与无穷集

定理 A 如果 $M \sim N_1 \subset N$ 及 $N \sim M_1 \subset M$,则 $M \sim N$.换句话说,就 § 3 的情形(2)言,一定是 $\bar{\bar{M}} = \bar{\bar{N}}$. (伯恩斯坦 (Bernstein)[1898].)

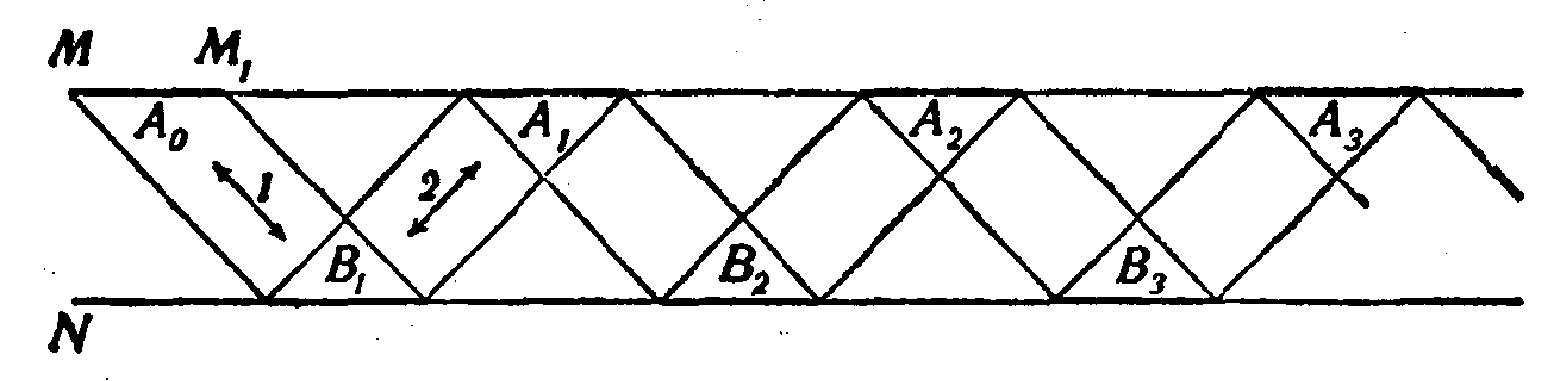
证明 根据假设, 我们可假定在N的子集N_1与M之间已给出了一个一一对应 $M \overset{1}{\sim} N_1$;类似地,有 $N \overset{2}{\sim} M_1$. 我们的问题是,找出第三个一一对应 $M \overset{3}{\sim} N$.

设 $A_0 = M - M_1$. 在所给定的对应 $M \overset{1}{\sim} N_1$ 中,M的子集A_0的元素所对应的元素将组成 N_1 的(因而也是N的) 子集 B_1, 可记为 $A_0 \overset{1}{\sim} B_1$. 又在另一已给对应 $N \overset{2}{\sim} M_1$ 中,N的子集 B_1 的元

素所对应的元素组成 M_1 的(因而也是M的)子集 A_1,可记为 $B_1 \overset{2}{\sim} A_1$;等等. 因此有

$$A_0 \overset{1}{\sim} B_1 \overset{2}{\sim} A_1 \overset{1}{\sim} B_2 \overset{2}{\sim} A_2 \overset{1}{\sim} B_3 \overset{2}{\sim} A_3 \overset{1}{\sim} \cdots$$

我们可如下理解,M与N为两个镜子,M在 M_1 以外的部分 A_0 被辗转反射而在M上产生了一个无穷长列的像 A_1, A_2, A_3, $\cdots$,又在N上产生了 B_1, B_2, B_3, $\cdots$,如下图所示.(集 M, M_1 及N是由水平线上在字母"M","M_1"及"N"以右的部分所表示;而集 A_0, B_1, A_1, $\cdots$等则由截下的线段所表示.)



令 $A = A_0 + A_1 + A_2 + A_3 + \cdots$,即$A$为$M$的子集,包括了$A_0$的元素或者它在$M$中的像 A_1, A_2, A_3, $\cdots$ 的任一个像的元素. 又令 $B = B_1 + B_2 + B_3 + \cdots$,即$B$为$N$的子集,包括了$A_0$在$N$中的像 B_1, B_2, B_3, $\cdots$的任一个像的元素.

要得到一一对应 $M \overset{3}{\sim} N$,我们须给出一规则使得对M的每个元素m来说都能确定对应于N的一个元素 n,并证明了这个对应是 M, N 间的一一对应.

规则　试考虑M的任一元素m. 那末,或者m属于子集A,或者m不属于A,即m属于 $M - A$. 如果m属于A则它在N中的对应元素n将是它在 $M \overset{1}{\sim} N_1$ 中所对应的元素. 如果m属于 $M - A$(这时m属于 M_1),则它在N中的对应元素n将是它在 $N \overset{2}{\sim} M_1$ 中的对应元素.

这样得出的对应是M与N间的一一对应,因为:

(a) M中的不同元素m,设为m_1与m_2,必对应于N中的不同元素n_1与n_2. 当 m_1与 m_2同属于A或同属于 $M - A$ 时这是显然的. 当 $m_1 \in A$ 而 $m_2 \in M - A$ 时这也是对的,因为这时 $n_1 \in B$ 而 $n_2 \in N - B$.

(b) N的每个元素都对应于M的某一元素 m. 因为，B的元素都有A的元素来对应，而 $N-B$ 的元素都有 $M-A$ 的元素来对应.

在M与N间建立一一对应的方法可以如下想像，在上图中把M中 $A_0, A_1, A_2, A_3, \cdots$的那些部分都向右移一步,因而 A_0 在 A_1 处，A_1 在 A_2处，A_2 在 A_3 处，$\cdots$. 这样一来，$N \overset{2}{\sim} M_1$ 便变成 $N \overset{3}{\sim} M$ 了.

系 A 如果 $M \subset N$，则 $\bar{\bar{M}} \leqslant \bar{\bar{N}}$.

($\bar{\bar{M}} \leqslant \bar{\bar{N}}$ 指: $\bar{\bar{M}} < \bar{\bar{N}}$ 或 $\bar{\bar{M}} = \bar{\bar{N}}$.) 事实上，如果 $M \subset N$，则取M作 N_1,必有情形(1a)或(2)成立.

空集O的基数记为 0 (注意，只有 $M' = O$ 时才 $M' \sim O$). 如果 $a \notin N$，则 $N + \{a\}$ 的基数记为 $\bar{\bar{N}} + 1$. (注意,对两个给定集合 $N + \{a\}, N' + \{a'\}$,且 $a \notin N$, $a' \notin N'$ 而言，$N + \{a\} \sim N' + \{a'\}$ 当且仅当 $N \sim N'$.)[1]

若把自然数 $0, 1, 2, \cdots, n, n+1, \cdots$ 当作已知的客体序列，那末上述两个定义便把每个自然数 n 都对应于一个基数，这基数亦记为 n. 这些基数叫做有穷基数，而具有这些基数的集叫做有穷集. 下列两个命题将在 § 7 例 1 中加以证明.

(1) 就每个自然数 n 而言，有穷基数 n 是下列集的基数：即依自然数的通常次序而由在自然数 n 以前的所有自然数所组成的集;用记号表之,则为，$n = \{0, 1, 2, \cdots, n-1\}$.

(2) 如果 $\bar{\bar{M}} = n$(n 为自然数),并且 $M \sim M_1 \subset M$,则 $M_1 = M$. 因此,有穷集与它的任何一个真子集都不等价.

由这两个命题便不难看出，依 § 3 的定义在有穷基数间所确定的相等关系 $m = n$ 及次序关系 $m < n$ 恰和自然数间熟知的相等关系及次序关系相一致(特别是，对有穷基数而言，确有 $n < n+1$). 因此,如果我们把自然数与有穷基数等同起来,亦不致有任何的混淆.

---

1) 原文此处不够精确,今改正——译者注.

如果一集不是有穷的，便叫做无穷的，而其基数便叫做无穷基数或超穷基数. 全体自然数集的基数，因而也是每个可数无穷集的基数(§ 1)叫做 $\aleph_0$（读为"阿里夫零"）.

系 B 如果 n 为有穷基数，则 $n < \aleph_0$.

证明 因为 n 为全体自然数集的子集 $\{0, 1, 2, 3, \cdots, n-1\}$ 的基数，依系 A，有 $n \leqslant \aleph_0$. 今试假定 $n = \aleph_0$. 因 $n+1$ 亦是有穷基数，故同样地有 $n+1 \leqslant \aleph_0$，由假定 $n = \aleph_0$，可得 $n+1 \leqslant n$，这与 $n < n+1$ 相矛盾. 故 $n = \aleph_0$ 的假设是不可能的，因而得 $n < \aleph_0$.

定理 B 任一无穷集 M 必有一个可数无穷子集.

证明 M 不是空的，否则它将有有穷基数 0 了. 故 M 有一个元素 a_0，但是 $M - \{a_0\}$ 又不是空的，否则 M 将有有穷基数 1. 故 M 又有另一个元素 a_1. 照此下去，我们可以选出不同的元素 $a_0, a_1, a_2, a_3, \cdots$，以对应于自然数 0, 1, 2, 3, ……，定理得证. 设 P 是 M 中未选到的元素所组成的集 $M - \{a_0, a_1, a_2, a_3, \cdots\}$，则

$$M = P + \{a_0, a_1, a_2, a_3, \cdots\}.$$

系 A 如果 $\overline{\overline{M}}$ 为无穷基数，则 $\aleph \leqslant \overline{\overline{M}}$.

由本定理及定理 A，系 A 得证.

系 B 任一无穷集 M 必与它的一个真子集等价.

因 M（表达如上式）等价于它的一个真子集

$$M - \{a_0\} = P + \{a_1, a_2, a_3, a_4, \cdots\}.$$

这个系与上文的命题(2)一起，曾由狄德金 (Dedekind)[1888] 提议作为分别有穷集与无穷集的另一定义.（可见，在伽里略"奇论"中所注意到的性质是无穷集的特征.）

系 C 对任一无穷集 M 引入有穷个或可数无穷个元素的集后，其基数并不改变.

因新元素 $b_0, b_1, b_2, b_3, \cdots$ 可如下引入

$$M + \{b_0, b_1, b_2, b_3, \cdots\} = P + \{a_0, b_0, a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3, \cdots\}.$$

反之，这个系说，如果从一集中抽出了可数多个元素，只要结果所得的集M为无穷集，则其基数并不改变． 如果原有的集为不可数的，则结果所得的集必然是无穷不可数的，否则对原有的集显然有一个枚举了．故

系 D 对一个不可数集而抽出有穷个或可数无穷多个元素时，其基数并不改变．

*§5. 更高的超穷基数

本节中的第一条定理是把 §2 中最后一例的情况作一般的表述．读者若对这定理及其引理就一些小的无穷集M作些独立的考察，那是很有好处的． 第二条定理是把定理A系B中所遇到的情况的推广．

为了简化证明的表述，我们利用等价定理，尤其它的系A．不过只须把论证略作更改，不用等价定理也可证明这些定理．

引理 A 如果$\mathbf{S}$为M的子集的集，且$M \backsim \mathbf{S}$，则M有一个子集T不属于$\mathbf{S}$.

证明 用康托的对角线法． 对M的一个子集而言，如果能够决定M的元素中那些是属于该子集的，那末M的子集便确定了．要确定这点，又只须给出一个一般的准则，由它可以对M的任何元素m而决定该元素属于该子集与否．现在我们便给出一个这样的准则来定义一个子集T.

准则 在假设所给出的一一对应$M \sim \mathbf{S}$中，M中的任何一个元素m都对应于$\mathbf{S}$的一个元素S. 但S为M的子集之一，因此或者m属于S或者m不属于S. 如果m属于S，则约定m不属于T. 如果m不属于S，则约定m属于T.

今试作一个与引理相反的假定，即假定T是属于$\mathbf{S}$的．则在一一对应$M \sim \mathbf{S}$中，M应有一个元素对应于T，设为m_1.

m_1是否属于T？我们把m_1当作m而应用准则．因为m_1对应于T，故准则中的S在现在情形应指T．不管m_1属于T或m_1不属于T，这个准则都引出了矛盾．

因此T属于$\mathbf{S}$的假设引出了矛盾．由反证法(即当由一命题而推出矛盾时，该命题的否定便证明了)，我们可作出结论说，T不属于$\mathbf{S}$．

设M为一给定的集，则M的子集的集，即以M的(所有)子集为元素而组成的集，今后记之为$\mathfrak{U}M$ ("$\mathfrak{U}$"由德文"Untermenge"(子集)而来)．

定理 C 对任何集M，$\bar{\bar{M}} < \overline{\overline{\mathfrak{U}M}}$(康托定理)．

证明 如果N_1是M的幺子集之集，则$M \sim N_1 \subset \mathfrak{U}M$．故由定理A系A，$\bar{\bar{M}} = \bar{\bar{N}}_1 \leqslant \overline{\overline{\mathfrak{U}M}}$．若本定理不成立，设$\bar{\bar{M}} = \overline{\overline{\mathfrak{U}M}}$，即设$M \sim \mathfrak{U}M$．则$\mathfrak{U}M$将适合引理中对$\mathbf{S}$所作的条件．根据此引理，$M$将有一子集$T$不属于$\mathfrak{U}M$．这是不可能的，因为$\mathfrak{U}M$是$M$的所有子集的集．故另一个可能$\bar{\bar{M}} < \overline{\overline{\mathfrak{U}M}}$必成立．

如果把具有超穷基数$\aleph_0$的集取作定理中的M，我们可以得出集$\mathfrak{U}M$，$\mathfrak{U}\mathfrak{U}M$，…，有越来越大的超穷基数．这些新基数记为$2^{\aleph_0}$，$2^{2^{\aleph_0}}$，…(事实上，对任何集$M$而言，$\mathfrak{U}M$的基数都记为$2^{\bar{\bar{M}}}$．注意，当$M$为有穷集时，这和通常算术的记法是一致的．)

引理 B 如果S为一集，而$\mathbf{M}$为S的子集的集，又对$\mathbf{M}$的每一元素M言，$\mathbf{M}$中均有另一元素M'使得$\bar{\bar{M}} < \bar{\bar{M}}'$，则对$\mathbf{M}$中每一元素$M$言，都有$\bar{\bar{M}} < \bar{\bar{S}}$．

证明 因为$M \subset S$，故由定理A系A得$\bar{\bar{M}} \leqslant \bar{\bar{S}}$．试与引理相反而设$\bar{\bar{M}} = \bar{\bar{S}}$．这时类似地我们有$\bar{\bar{M}}' \leqslant \bar{\bar{S}}$，这与$\bar{\bar{M}} = \bar{\bar{S}}$合起来就得出$\bar{\bar{M}}' \leqslant \bar{\bar{M}}$，这是与$\bar{\bar{M}} < \bar{\bar{M}}'$相矛盾．故$\bar{\bar{M}} = \bar{\bar{S}}$这个假定是错误的，另一个可能$\bar{\bar{M}} < \bar{\bar{S}}$必成立．

如果$\mathbf{M}$为一集且其元素又是集，则属于$\mathbf{M}$的某元素M的那些元素(全体)所组成的集叫做属于$\mathbf{M}$的集的并集，并记为$\mathfrak{S}\mathbf{M}$．属于$\mathbf{M}$的每一个元素M的那些元素所组成的集叫做属于$\mathbf{M}$的集的交集，并记为$\mathfrak{D}\mathbf{M}$("$\mathfrak{D}$由德文"Durchschnitt"(交集)而来)．这些概

念与§3所引进来的一样，不过这时却运算于集M的集$\mathbf{M}$(被并或被交的集M的集)之上罢了．例如，$M+N=\mathfrak{S}\{M,N\}$，$M\cdot N=\mathfrak{D}\{M,N\}$.

定理 D 如果$\mathbf{M}$为集的集，又如果对于$\mathbf{M}$的每一个元素M而言，$\mathbf{M}$中都有另一个元素M'使得$\overline{\overline{M}}<\overline{\overline{M'}}$，则对$\mathbf{M}$的每一个元素$M$而言，必有$\overline{\overline{M}}<\overline{\overline{\mathfrak{S}\mathbf{M}}}$.

证明 由$\mathfrak{S}\mathbf{M}$的定义可知，$\mathbf{M}$的每一元素M均是$\mathfrak{S}\mathbf{M}$的子集．若取$\mathfrak{S}\mathbf{M}$作为引理中的S，则本定理可由引理B得出．

我们知道，集M，$\mathfrak{U}M$，$\mathfrak{U}\mathfrak{U}M$，…分别具有越来越大的超穷基数$\aleph_0$，$2^{\aleph_0}$，$2^{2^{\aleph_0}}$，…，但由本定理可知，它们的并集都具有一个比这些基数中任何一个还要大的超穷基数，根据定理C又可把这并集作为起点，而得出一个新的递增的基数系列．这样的系列可以无穷扩张下去．

要更详细的知道康托的关于抽象集的理论，例如可见康托[1895-7] 豪斯多夫(Hausdorff) [1914] 或 [1927]，弗兰克尔(Fraenkel)[1928]或[1953]．这理论还有一个密切的分支，是处理“序数”的．“基数可比较定理”，即肯定$\overline{\overline{M}}<\overline{\overline{N}}$，$\overline{\overline{M}}=\overline{\overline{N}}$及$\overline{\overline{M}}>\overline{\overline{N}}$是穷举的(见§3末)乃是蔡尔梅罗(Zermelo) [1904] 的“良序定理”的一个系(例如，参见豪斯多夫[1914]或[1927]，p.61，或弗兰克尔[1928]，p. 205)．至于有名的“连续统问题”，即在$\aleph_0$与$2^{\aleph_0}$之间有没有任何基数的问题，哥德尔(Gödel) [1947] 曾有简短的讨论．

我们所以从康托的理论开始，是由于两个完全相反的理由．第一，作为今后的基础的那些概念及方法，有些已经以原始的及简单的样子出现在这理论中了．其次，这个理论如果发展得太远，是会引起逻辑的困难来的，而这困难正是我们主要探讨的出发点．这将在第三章中看到．

例 具有基数$2^{\aleph_0}$的集．这是所有自然数集全体子集所组成的集所具有的基数，在§2中我们曾称之为各种自然数集的集．在那里，我们把这集的元素用由0与1所组成的无穷序列来表示．0

与 1 可以看作二进记数法中的数字记号（二进法以 2 为底正如十进法以 10 为底一样），这样我们便得到所有二进真小数的集了．应用定理 B 系 D 来除去有穷小数（这只有可数多个），我们便得到无穷二进真小数．后者一一地表示了区间 $0<x\leqslant 1$ 内的全体实数 x． 由真无穷二进小数我们又一一地得出自然数所组成的无穷序列或者以一自然数为主目以自然数为值的函数．只须把每一个小数与具下性质的函数 $f(n)$ 来对应便成，$f(0)=$ 小数中在第一个 1 以前 0 的个数，$f(2)=$ 小数中第一个 1 与第二个 1 之间的 0 的个数，等等（例如，函数 n^2 对应于小数 0.1010000100000000001……）.

如果在区间 $0<x\leqslant 1$ 中删除了数 $x=1$，只留下区间 $0<x<1$ 内的实数 x．容易找出一函数 $y=f(x)$，使得当 x 在本区间内变时，函数取每个实数也恰好只取每个实数一次作为 y 的值，例如函数 $y=\cot \pi x$ 就是．若除去有理数，则只留下（实）无理数；又如除去代数数，则留下超越数．在笛卡尔解析几何中，实数与实欧几里得直线上的点的坐标是对应着的．此集便是‘线连续统’，因此基数 $2^{\aleph_0}$ 便是‘连续统的势’.

其次，我们又可用下法得到实数有序对的集，如果把对偶 (x, y) 看作平面上的笛卡尔坐标，便得到实欧几里得平面上的点．根据上面已经得到的实数集与0，1无穷数列集的等价性，可知任两个实数 x, y 对应于两个 0，1 无穷数列

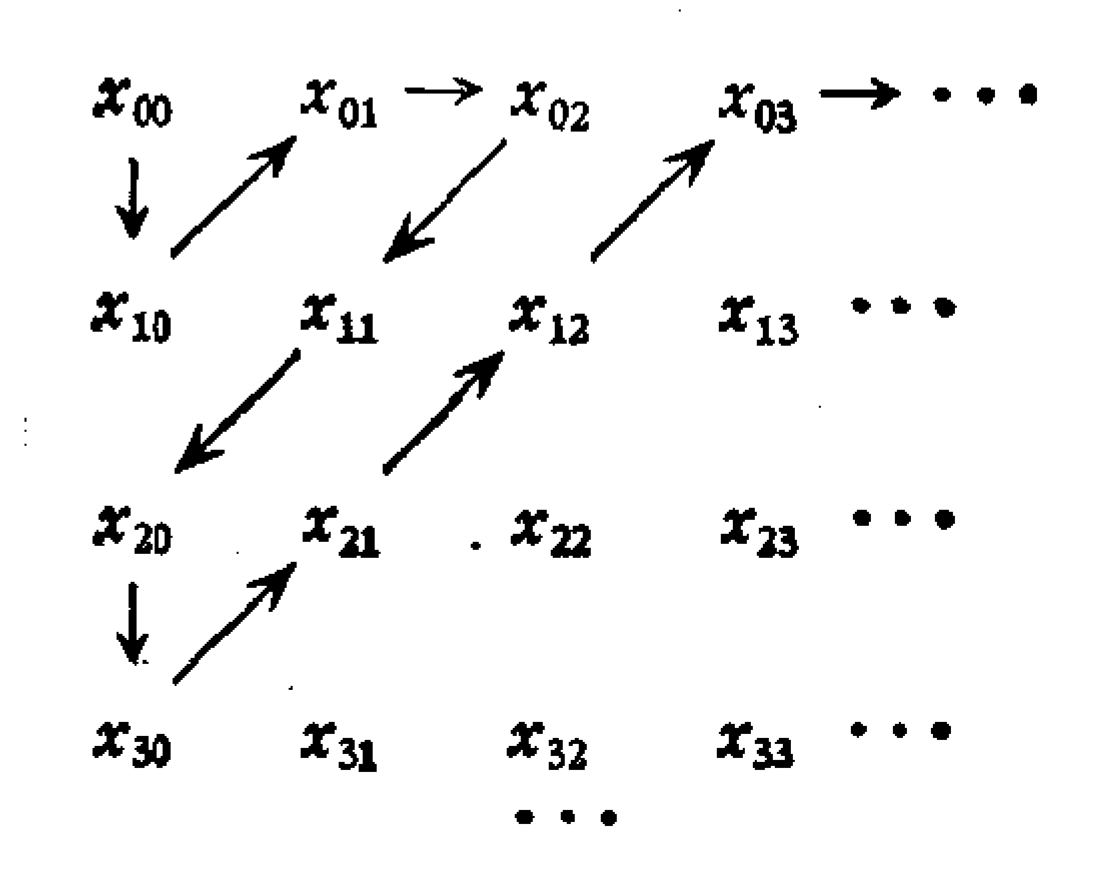
$$x_0\, x_1\, x_2\, x_3 \cdots,$$

$$y_0\, y_1\, y_2\, y_3 \cdots,$$

而这可以并成一个单一序列

$$x_0\, y_0\, x_1\, y_1\, x_2\, y_2\, x_3\, y_3 \cdots,$$

对应于唯一的一个实数．反之，任何一个序列都可根据这个并合法而拆成确定的一对序列．同样的过程得出实数 n 元组（对于任何固定正整数 n）或 n 维实欧几里得空间的点甚至于可得出实数的无穷序列或 $\aleph_0$ 维实欧几里得空间的点．后者可用 §1 所用的方法把 $\aleph_0$ 个 0，1 数列



并成一个数列

$$x_{00}\ x_{10}\ x_{01}\ x_{02}\ x_{11}\ x_{20}\ x_{30}\ x_{21}\ x_{12}\ x_{03}\ \cdots$$

在其中所给的每个数列的每一项都有一个确定的位置.

由于连续性，只要实变数的实连续函数在有理数主目处的函数值已经给定了，该函数所有的值也就定了. 只须依一个固定的枚举法确定了有理数的次序，那末这些函数值也就可以作为实数的无穷序列而给出. 因此，由定理A系A这些函数的集至多具有基数 $2^{\aleph_0}$. 但因为常函数集(具有基数 $2^{\aleph_0}$)是它的子集，故这集又至少具有基数 $2^{\aleph_0}$，因此，它便恰好具有基数 $2^{\aleph_0}$.

具有基数 $2^{2^{\aleph_0}}$ 的集. 这是自然数的集的集的基数. 由于自然数的集与实数或 n 维空间或 $\aleph_0$ 维空间的点之间的等价性，可知实数的集或 n 维实欧几里得空间的点集或 $\aleph_0$维实欧几里得空间的点集也具有这个基数. 实变元的实函数可由它们的图形表示，这图形又是平面中的点集，故实函数集最多具有基数 $2^{2^{\aleph_0}}$. 但是只以 0, 1 为值的函数可作为实数集的代表函数，因而便是具有基数 $2^{2^{\aleph_0}}$ 的子集，故知实函数恰好具有基数 $2^{2^{\aleph_0}}$. 如果我们引用几何术语到这例子上来，我们便得到了 $2^{\aleph_0}$ 维实欧几里得空间的点所成的集了.

第二章　若干基本概念

§6. 自　然　数

本章的目的是汇集数学中一些概念和方法，其中一部分是为了今后引用，一部分是为了作更深入的考察.

当我们写出数列

$$0, 1, 2, 3, \cdots\cdots$$

时，我们依赖于几个点"…"来暗示这数列除写出的几项外还继续引伸下去.

克伦涅客 (Kronecker) (1886) 说: "上帝造整数，其它的都是人造的."我们不能够希望对自然数列的认识可以化归到本质上比它更原始的东西去.

但当研究在我们的自然数概念中到底包含一些什么东西时，我们却可以把对自然数推理的根据弄得更清楚些.

我们首先可把自然数描写成依下法产生的客体，由开始的客体 0 (零)出发，而继续地由已经产生了的客体 n 而过渡到另一客体 $n+1$ 或 n' (n 的后继者)去.

这里，我们认为，不管我们达到 n 时已经走了多远，我们总可以再多走一步而达到 n'. 这里，我们所以用撇记号"n'"而不用更熟见的"$n+1$"，乃强调 $'$ 是原始的用以产生自然数的一元运算或函数，以后才把＋定义为一个二元运算或二个自然数的函数.

要得出自然数的通常记号，只须把 0, 1, 2, 3,……等解释为分别表示

$$0, 0', 0'', 0''', \cdots\cdots$$

便成. 但这已牵连到十进位记数法了.

在上面的描述中，我们已用到离散步骤系到这个概念. 这些

步骤是从 0 出发，并且重复地由一自然数 n 而进到次一自然数 n'。这个描述可以分成几句如下：

1. 0是一自然数. 2. 如果 n 是自然数，则 n' 亦是自然数。3. 只有由 1 及 2 给出的才是自然数.

在这种表述下，离散步骤系列便变成了一次应用句子 1 及一连串的应用句子 2. 这三句合起来便构成了所谓归纳定义的一例子. 被定义的名词（'自然数'）是用斜体字排印的. 除最后一句外，其它各句都作出被定义的名词的实例，故叫做直接句子；最后一句说明所有实例都限于由前面的句子所给出的，故叫做限制句子.

在这个归纳定义中没有叙述到的是相异性的条件，即是说，按不同方式而施用句子 1 和 2 时所得的数应是不同的客体. 这条件可分写成两个命题.

4. 对于任何自然数 m 与 n，当 $m' = n'$ 时必有 $m = n$。5. 对任何自然数 n，$n' \neq 0$。

我们还假定 $'$ 是一个单值的运算子或单值函数，因此可得 4 的逆：对于任何自然数 m 与 n，如果 $m = n$，则 $m' = n'$。

为了确信命题 4 及 5，保证了以不同方式所生成的任意两个数是不同的，我们可作如下推论. 假定在数的生成过程某一阶段中，已经生成的一切数 0, 1, 2,……, n 都是不同的. 那末下一次所生成的 n' 必然与前面所生成的继数 1, 2,……, n (由 4)以及与数 0 (由 5) 有所不同. 因此在生成过程中每下一步骤都生出某一个新数.

例如，$0'''' \neq 0''$ 可如下看出. 由 4，试把 $0'''$ 作为 m 而 $0'$ 作为 n，则仅当 $0''' = 0'$ 时，有 $0'''' = 0''$. 再由4，仅当 $0'' = 0$ 时，有 $0''' = 0'$. 但由5，从 $0'$ 作为 n，得 $0'' \neq 0$.

除却有一处差异外，这五个命题曾被皮亚诺 (Peano) ([1889, 1891*]) 取作刻划自然数序列的公理. 皮亚诺把命题 3 叙述成数学归纳法原理(§ 7)，以作为他的第五公理，而把 4 与5分别改为 3 与 4。

这里，我们不讨论自然数本质上是什么，只讨论它们如何组成自然数序列．每个个别的自然数只当作在自然数列中占着一定位置的客体，换句话说，如果按照归纳定义已给出一数的生成法时则该数就算给出了．例如，自然数 4 可定义为由下法所得出的客体，由开始客体 0 出发，应用后继运算一次，一次，一次又一次；或简单地，4 可定义为 $0''''$． 在十进位系统中表为 872656 的这个数，在原则上亦可由应用$'$于 0 而得，尽管实际上我们并不这样做．

当然，当我们说某方程式有两个根时，我们亦把自然数用作有穷集的基数(§ 4)．

次序　按照自然数的归纳定义，自然数是依一定的次序(通常的) 而产生的． 因此，如果在 n 的产生过程中数 m 产生于数 n 之前，我们便说 $m < n$．在剖析了这点时，我们对关系式 $m < n$ 就可作如下的归纳定义(其中 m，n 遍历自然数)．

O1．$m < m'$．　O2．如果 $m < n$，则 $m < n'$　O3．只有由 O1 及 O2 才给出 $m < n$．

对一个固定的 m 而言，如果把这定义读作大于 m 的数 n 所成的类的归纳定义，那末它便具有上述的自然数的归纳定义的样子，不过把 0 换为 m' 罢了．

§7. 数学归纳法

令 P 为自然数的一个性质．设有：

(1) 0 具有性质 P．

(2) 如果任何一个自然数 n 具有性质 P，则它的后继者 n' 亦具有性质 P．

那末，每个自然数 n 都具有性质 P．

这是数学归纳法原则．若用“n”作为自然数变元，而以记号“$P(n)$”表示命题：n 具有性质 P，我们可把这原则叙述得更简单些：如果(1) $P(0)$，(2)对任何 n，如果 $P(n)$，则 $P(n')$，那末对任何 n，$P(n)$．

当把自然数理解为根据 §6 的归纳定义 1—3 所生成的客体时，这个归纳原则几乎马上可以认为是合理的. 假设我们有一个性质 P 它满足(1)与(2). 是不是所有自然数都应该具有性质 P?对这问题的肯定回答将理解为：如果任意给出了一自然数 n，我们可以确切地说 n 具有这性质 P. 但所谓给出一个自然数 n 必须(实际上或原则上)是指我们已根据归纳定义给出了它的生成过程，即由 0 出发，并明显说出应用了若干次的后继运算 $'$. 在这情况之下，我们可用(1)与(2)而推出 n 具有性质 P，例如，$P(4)$是真的，因为 4 可给定为 $0''''$；由(1)有 $P(0)$；故由(2)$P(0')$；再由(2)$P(0'')$；再由(2)$P(0''')$；再由(2)便得 $P(0'''')$.

换言之，我们是根据归纳定义的句 1 句 2 而产生自然数的，而(1)与(2)便是一个工具使得在产生每一数的同时还证实它具有性质 P.

这个证明当然是根据归纳定义中的限制句子 3. 反之，亦可用归纳原则来证明句子 3，只须把下列命题作为 $P(n)$ 而应用归纳原则便成：n 是根据句 1 与句 2 而成为自然数的，亦即，n 可由 0 出发再施用后继运算 $'$ 而生成的.

在作数学归纳法的证明时，我们使用下列术语，依赖于自然数变元 n 的命题 $P(n)$，可叫做归纳命题，变元 n 叫做归纳变元或归纳数或实施归纳的变元. 用以推出(1)的证明，亦可用以推出 $P(0)$ 的证明，可以叫做归纳奠基. 用以推出(2)的证明，亦即推出如果 $P(n)$ 则 $P(n')$ 的证明，可以叫做归纳推步. 在归纳推步中，用以推出 $P(n')$ 的假设 $P(n)$，可叫做归纳假设.

有时为了要完成归纳推步，所作的归纳假设不但是 $P(n)$ 而是所有的 $P(m)$，$m \leqslant n$. 读者可相信这样修整后的归纳原则仍然成立，它叫做串值归纳[1]. 如果命题不是有关于自然数而是有关于正整数的，亦可进行归纳，这时在奠基中便须证明 $P(1)$.

在初等代数课程中读者已遇到了数学归纳法. 我们常用有关

---

1) 上述一种便叫简单归纳——译者注.

于级数和的公式作为用归纳法证明的命题的例子，在证明之前，这些公式不是明显的．我们常常当作自明的许多命题，如要作严格的证明时，是靠归纳法的；又有时归纳推步是太过简单了，常常用“等等”或用类似的字句而一笔带过（例如，§ 4 的定理 A 及 B）．

例 1 试就 n 归纳而证明 § 4 的命题（1）与（2）．我们证明（2），读者可自证（1）．归纳命题是：对任何集 M 与 M_1，如果 $\overline{M}=n$ 而 $M \sim M_1 \subset M$，则 $M_1 = M$．奠基：$n=0$．设 M 与 M_1 为两集，而 $\overline{M}=0$ 即 $M=O$ 又 $O \sim M_1 \subset O$．这时便有 $M_1 = O$．归纳推步，假定上面写的命题为真（当作归纳假设）．令 M 及 M_1 为两集使得 $\overline{M}=n+1$，即 $M=N+\{a\}$．而 $\overline{N}=n$ 及 $a \notin N$，又 $N+\{a\} \sim M_1 \subset N+\{a\}$．我们须证明这时有 $M_1 = N+\{a\}$．在所给的一一对应 $N+\{a\} \sim M_1$ 中，$N+\{a\}$ 中的元素 a 与 M_1 中某一元素 b 相对应，故 $N \sim M_1 - \{b\} \subset (N+\{a\})-\{b\}$．又 $(N+\{a\})-\{b\} \sim N$．故 $\overline{(N+\{a\})-\{b\}}=n$ 及 $(N+\{a\})-\{b\} \sim M_1-\{b\} \subset (N+\{a\})-\{b\}$．依归纳假设，把 $(N+\{a\})-\{b\}$ 作为 M 而 $M_1-\{b\}$ 作为 M_1，可得 $M_1-\{b\}=(N+\{a\})-\{b\}$．故（因 $b \in M_1$ 及 $b \in N+\{a\}$），$M_1 = N+\{a\}$．

例 2 在数学公式中经常引人括号以表示公式各部分之间以何种方式结合．在较复杂的情形下可用不同种类的括号如（ ），{ }，[ ]等；而在非常复杂的情形下则可用种种不同的省写而避免之．但是，原则上有一个问题，即如果只用一种括号，公式中的结合方式是否可无含混地由它的括号而确定？（这问题等价于一个关于区间套的几何问题．）

为了把这问题弄得更清楚，设我们有 $2n$ 个括号，其中 n 个是左括号(，另外 n 个是右括号)，它们由左到右排成直线顺序，这是它们在数学公式中出现的方式，公式中其他的符号（这里不必注意）则在它们之间散布着．

我们说，两对括号是彼此隔开的，如果它们成下次序 $(_i(_j)_i)_j$，这里用 i 来标记某一对括号，而 j 则标记另一对，至于其它括号则

可在这四者之间散布着.

在 n 个左括号与 n 个右括号之间所作的配对(简称 $2n$ 个括号的配对),如果每一个左括号永远与在右的右括号相配,并且没有两对括号是隔开的,那末便说这种配对是正常的.

显然如果 $2n$ 个括号是正常地配对,那末任意除去一对,其它的括号仍是正常地配对的. 在 $2n$ 个括号中某一对括号所包括的那些括号亦是正常配对的.

下列三引理便是上述问题的答案以及有关的一些结果.

引理 1 在 $2n$ 个括号($n>0$)的正常配对中恒有一对最内的括号,即其中没有其它括号的(一对括号).

对 n 作串值归纳而证明. 我们可把 n 当作正整数或自然数. 如当作自然数,则奠基是空虚地真确,即因它的前提不被满足而真确. (提示:在归纳推步时,最左的括号将是一个左括号 ($_i$, 这括号与它的配对); 或者组成一个最内的括号,或者包括有一组括号在其中,对这组括号便可施用归纳假设了.)

引理 2 每组 $2n$ 个括号至多允许一个正常的配对.

这可以对 n 作(简单)归纳来证明. (提示:在归纳推步时,根据引理 1,该组括号有最内的一对. 抽出这对,余下来的一组括号便可施用归纳假设了.)

引理 3 如果 $2n$ 个括号以及其中相继的 $2m$ 个括号都允许正常的配对,则对该部份所作的正常配对便是对全体括号所作的正常的配对的一部分,换句话说,在两次配对中,该部份的括号都有相同的配偶.

这可以对 m 作归纳来证明.

试举一例,可考虑下列 22 个括号

$$(^1_7\,(^2_6\,(^3_4\,(^4_2\,(^5_1\,)^6_1\,)^7_2\,(^8_3\,)^9_3\,)^{10}_4\,(^{11}_5\,)^{12}_5\,)^{13}_6\,)^{14}_7\,(^{15}_{11}\,(^{16}_{10}\,(^{17}_8\,)^{18}_8\,(^{19}_9\,)^{20}_9\,)^{21}_{10}\,)^{22}_{11},$$

正常的配对已以足码表之,它可由下列的'算法'得到(由引理 2 的

证明而提示的)：在每一阶段都由左向右找寻开始出现的未曾用到的最内的一对，把这一对便作为配对时的配偶．根据引理 2，找寻此外的配对法是无用的．在第 12 个括号之右的第三个括号起组成一个相继的部分括号组，它的正常配对已经在找寻全体的配对时找出了．根据引理 3，对于任何一个允许正常配对的相继的部分括号组，要想在全体配对时所找到的正常配对以外再找其它的正常配对法，那是无用的．

§8. 客 体 系 统

一客体系统 S 是指一些客体的（非空的）集（或类或区域）D（或者可能是若干个这种集），其客体之间已建立了一些关系．

例如，自然数列(§6)便是$(D, 0, ')$型的系统，其中 D 是集，0 是集 D 的元素，而 $'$ 是对集 D 的元素所作的一元运算．另外的简单例子是$(D, <)$系统，其中 D 是集，而 $<$ 是该集的元素间的二元关系．

当这系统的客体只能通过这系统的关系式而知道时，这系统叫抽象的．在这时，所要研究的是这系统的结构，至于其中的客体究竟是什么，除去有关于它们如何适应这结构的以外，是不必明指的．

如果对客体是什么而作进一步的明指，我们便得到该抽象系统的一个表示(或模型)，即是说，得到一个客体系统，它除适合这抽象系统的关系式以外，还有其它的性态．这些客体不必一定是更具体的，因为它们可选自其它的抽象系统(甚至于可由同一系统中选出，不过对关系式重作解释罢了)．

抽象自然数列的一些不同表示有：(a) 自然数当作有穷集的基数，(b)当作正整数(用 1 表示抽象的 0)，(c)偶自然数(用+2 表示抽象的运算$'$)．(d)有时包装商品的盒子上贴有广告，其中画有盒子本身．从物理上来说，这广告画的准确性是有限的．但如果我们假设完全准确的话，我们可把盒本身看作 0，盒画中的盒看作

1，盒画中的画中的盒看作 2 等等.

同一抽象系统的两种表示必是(简单)同构的，即可以作出保持关系式的一一对应．更确切的说，$(D, 0, ')$型的两个系统$(D_1, 0_1, '_1)$与$(D_2, 0_2, '_2)$是简单同构的，如果 D_1 与 D_2 之间有一个一一对应便得 0_1 对应于 0_2(记为 $0_1 \longleftrightarrow 0_2$)，并且，如果 $m_1 \longleftrightarrow m_2$ 则必有 $m_1{'}_1 \longleftrightarrow m_2{'}_2$．$(D, <)$型的两系统$(D_1, <_1)$与$(D_2, <_2)$为简单同构，如果在 D_1 与 D_2 间有一个一一对应使得如果 $m_1 \longleftrightarrow m_2$，$n_1 \longleftrightarrow n_2$ 时，则 $m_1 <_1 n_1$ 当且仅当 $m_2 <_2 n_2$.

反之，任何两个简单同构的系统都是同一抽象系统的两个表示，该抽象系统是由该两系统的任一个当中抽出来的，即除该抽象系统所应讨论的关系式及性质以外，完全舍弃其余的性质而得.

$(D, 0, ')$型的抽象系统的另一个例子是，设 D 只有两个（不同）的客体 0 与 1，并令 $0' = 1$ 而 $1' = 0$．这系统叫做模 2 剩余系． 当把每个自然数改为它被 2 除所得的剩余（即依模 2 求余）后，自然数列便变成这个抽象系统了，即

$$0, 1, 0, 1, 0, 1, \cdots$$

（剩余系首先由高斯（Gauss）1801 所研究）.

第三个例如下，设 S 由两序列组成

$$0, 1, 2, 3, \cdots; \quad \omega, \omega+1, \omega+2, \omega+3, \cdots$$

每一序列本身都和自然数序列有相同结构，而两序列的元素之间却没有直接后继关系.

我们可以很容易地把这三个例子修改，把它们当作$(D, <)$型的系统，对第三例言，其元素的次序便照上面所给的；它们叫做小于 2ω 的序数(依康托的序数论).

模 2 剩余系（或它的表示）与自然数系（或它的表示）并不同构，因为无法建立一一对应． 小于 2ω 的序数与自然数系间亦不同构，因为不能够建立保持 $'$ 运算（或保持次序关系 $<$）的一一对应.

在本节内，我们用“S”表示系统而“D”表示这系统的客体集，如果该系统有这样的一个集的话． 这两者常常可用同一符号表

示，以使记法简化且不致混乱．例如，当照上面那样来讨论自然数系N时是可以这样办的．又例如，在说到自然数的系统$(N, <)$，但把偶数（奇数）自己之间的次序照通常所定，而所有偶数均在所有奇数之前，这时便不能这样办了．（这个系统是小于2ω的序数的一个表示．）

把客体系统引入数学来时，可有两个相反的方法或观点．（参见希尔伯特（Hilbert）[1900]．）

发生法或构造法，如自然数的归纳定义那样（§6）．在那里我们把自然数理解为依某一确定的次序产生或构造的．（这并不妨碍我们抽象地处理它们．）

另一方面，公理法或公设法却是一开首便把一些命题，叫做公理或公设，以作为对客体系统S的假设或条件．然后从这些公理推演一些后承，并以此构成满足这些公理的任何一个客体系统S的理论．

例如，我们可将皮亚诺的五个公理作为公理．为了使得论点清楚起见，我们再次写下这些公理，并用"D的元素"代替"自然数"．

P1．$0 \in D$．P2．如果$n \in D$则$n' \in D$．P3．如果$m \in D$，$n \in D$则当$m' = n'$时必有$m = n$．P4．如果$n \in D$则$n' \neq 0$．P5．如果$P \subset D$并且（1）$0 \in P$（2）只要$n \in P$则$n' \in P$，那末$P = D$．

我们已经知道恰好只有一个抽象系统S满足这五个公理，即自然数系统，这我们在上文已经根据发生观点而引入了．

但从公理法观点看来，我们亦可以讨论另外一组公理，例如P1—P4．这时S可以是自然数，亦可以是小于2ω的序数，或者是许多种抽象地不同的（即不同构的）系统之一．

如果以P1—P3，P5为公理，那末满足它们的而又彼此不同的抽象系统便恰巧只有自然数系统以及模m剩余系统（对每个正整数m言）了．

其次，如果我们不但除去P4，还改用下列公理

P6．如果$n \in D$，则$n' \neq n$但$n'' = n$，

这时又只有一个抽象系统满足它了，即模 2 剩余系统.

没有一个系统 S 可以满足 P1—P6 六个公理，因为只有自然数系统满足 P1—P5，只有模 2 剩余系统满足 P1—P3，P5，P6.

有时我们说公理理论中的公理是该理论中的客体系统的一个隐定义；但这只能意指：对于在理论以外所确定的系统而言，可由公理决定究竟那一个系统可被该理论所适用，这时便有三个情况发生. 可以没有任何客体系统满足这些公理(例如 P1—P6)；或者只有一个抽象系统满足它们，凡满足它们的任何两个系统都必同构(例如，P1—P5，或 P1—P3，P5，P6)；或者有多个抽象系统，即多个不同构的抽象系统满足它们(例如，P1—P4 或 P1—P3，P5). 对于第一情形，我们说该公理系是空的；其它两情形是非空的，而第二情形可说是完备的(范畴的)(维伯伦 (Veblen) [1904])，第三种情形是分歧的(不完备的). (另一方面，在发生法中，通常都是想用发生过程来完全地决定该系统的抽象结构的，即想作为该系统的范畴性定义的.)

给出一个公理理论，这三种可能中那一种实现，这绝不是显然的. 在历史上，除去欧氏平行公设后的欧氏几何便是一例(由该欧氏平行公设可以推出一定理，即通过直线外一点恰巧只有一条直线平行于该直线). 自从欧氏"原本"(约公元前 330—320 年)起至洛巴契夫斯基 (Lobatchevsky) 1829 年与波里埃 (Bolyai) 1833 年发现非欧氏几何时止，一般都认为这些公理是完备的；或者至少认为如果这样子提出问题时，可能会得到这样解答.

希腊人相信他们是处理空间的唯一结构，这个信念并未表述于现在的术语中. 欧几里得以为他的公理是表示真实空间的一些基本性质. 对这些古老意义的公理法，即以为系统 S 中的客体是在公理之前已经知道的，可以特别称之为非形式的或实质的公理法. 在这里，公理仅仅是表示一些非常显明，由其构造马上知道的客体的性质，或者就应用于经验古界的理论言，公理只是直接从经验中抽出来的或者只是关于该世界的公设.

至于上面所描述的公理方法，则把公理当作是在 (这些公理)

所论述的客体系统的任何明指之前的（因而公理可以用于引入系统 S 或把系统 S “隐定义”）. 这方法是由希尔伯特“几何基础”[1899] 开始有系统地发展起来的，它可以叫做形式公理法或存在公理法. 我们必须注意，只有在该形式公理理论之外(即在别的理论中）我们才能够考查满足该公理的抽象系统 S 倒底是只有一个或多个或没有. 至于在形式公理理论之内，S 的区域 D 就起一个固定的、完备的客体（S 的运算及关系等则可以在其中应用)的作用，并且该客体集假定一开始便存在而无须任何生成的.

对一个$(D,0,{}')$型的系统 S 而言，0 与 $'$，或 D,0 与 $'$ 叫做原始概念、技术概念或无定义概念，即在引入公理以前它们是没有定义的，公理中的其它名词则是寻常的、逻辑的或有定义的，它们的意义必须预先知道. 关于 D,0 及 $'$，所要预先知道的只是，D 是一集，0 是属于 D 的一客体，而 $'$ 是施用于 D 的元素上的运算，即只有“D”，“0”与“$'$”三者所属的文法范畴是预先确定的. 同样地，对于$(D,<)$型系统，无定义概念是 $<$，或 D 与 $<$.

在数学的实践中，要引入一个客体系统，发生方法及公理方法常常是相互作用着的，例如，满足某些公理的客体系统总是用发生法而给出的. 有时，这种系统可由别的形式公理理论中抽出来. (无论那一种情况，只要把所给的形式公理的理论 S 和理论以外的客体系统相等同时，我们便得到这个形式公理理论的一个应用，在这应用中，它却变成一个实质公理理论了.)

形式公理方法经常用于分歧(不完备的) 公理系统，因而把许多不同的系统的公共部分同时发展起来了. 代数中“群论”便是有名的例子.

作为另一个例子，试考虑下述的线性次序的公理，它是应用到$(D,<)$型的系统中去的.

L1. 如果 $m<n$ 及 $n<p$，则 $m<p$. L2. $m<n$, $m=n$ 及 $m>n$ 中至多有一个是成立的. L3. $m<n$, $m=n$ 及 $m>n$ 中至少有一个是成立的.

这里 $m>n$ 意指 $n<m$. 变元 m, n, p 是对 D 的任意元素

而说的．如果把D当作自然数，或$<2\omega$的序数，或整数，有理数或实数，又把$<$当作通常的次序关系，那末上述三公理是成立的；此外还有很多系统亦可以满足它们．如果把L3删去，我们便得到偏序的公理集．

*§9. 数论与解析学

算术或数论可以描述为下述的数学的一分支，即它处理自然数以及其它(范畴地定义的)可数的客体系统，例如整数系或有理数系等．这种系统之一(或关于它的理论)可以叫做一个算术[1]．处理方法经常是抽象的(§8)．客体经常是当作个体(即它们不分解为其它客体的组合)，除非在某些场合下，例如，当我们研究非负有理数的基本性质时，有时把它们表成自然数的有序对偶．

在狭义算术中，我们主要讨论两个特殊运算，+(加)及·(乘)以及若干有关运算．在广义算术或数论中，我们使用更多的概念．

这些定义是用来明确我们的用语的．有时“算术”一名用来表示有关于不可数的数系的+与·的理论(例如‘超穷基数算术’)．

在算术或数论中所研究的系统的基数都是$\aleph_0$(有时是有穷的)，但另一方面解析学却是处理实数系统或其它基数为$2^{\aleph_0}$(有时具有更高的基数)的客体系统．和数论同样，在解析学中所使用的客体系统经常都被认为是完全(范畴地)确定的．

解析学的结果有时候被用到数论的研究中，这种研究就构成解析数论． 没有应用解析学的数论可以叫做纯粹数论或初等数论．

现在我们简单地检查解析学的客体的基本系统，即实数的连续统．

现在作为解析学的基础的实数论(除却对解析学基础的批判外)是由高斯(1777—1855)柯希(Cauchy)(1789—1857)与阿贝尔(Abel)(1802—1829)所发动的上一次的批判运动而产生的．

1) 算术本指一种科学理论，作者这里想把它兼指一个客体系统——译者注．

在十九世纪后半这运动便引起所谓解析学的算术化，由外尔史特拉斯（Weierstrass)(1815—1897）狄德金（Dedekind)(1831—1916）梅雷（Méray）（1835—1911）康托（1845—1918）所领导．以前信赖于颇为含混的几何的直觉，现在则把实数定义为由自然数、整数或有理数所组成的一些客体了．因此实数的性质便最后归结于自然数的性质了．庞恩加来（Poincaré）[1900] 说，“今天在解析学中只留下整数，或者整数的有穷系或无穷系，并以等式或不等式的关系而彼此联系着.”

从自然数、整数或有理数而定义实数可以有几种方法．它们都可以导出实数连续统同样的抽象结构．换句话说，每个定义所完成的都是对实数而给出一个表示(§ 8)，用(直接地或间接地)由自然数所组成的客体来表示.

我们曾用十进或二进小数表示实数(§2，§5)，在原则上来说，任何一个集只要证明了它与这种小数等价(§5)，例如自然数的集，都可以用．不过实际上，我们总是选定一种表示以使得在定义实数的性质时更为简单.

用狄德金分划([1872])所作的表示可以使得实数的次序特别显明、清晰，设把全体有理数 R 分作两个非空集 X_1，X_2，使得 X_1 中每个有理数小于 X_2 中每个有理数．这样一个划分叫做（对 R 的）狄德金分划．当下集 X_1 没有最大的有理数而上集 X_2 没有最小的有理数时，这分划叫做开的．狄德金的观念就在于：恰好开分划出现之处便是要求无理数之处．有理数列和两个闭分划的任一个相连系而出现的：一个是以它为 X_1 中最大数，另一个是以它为 X_2 中的最小数．为了使得每个实数（有理或无理）都有唯一的表示)，我们今只使用其下集是没有最大数的那种分划的下集 X_1．因此我们有下面的定义(我们把 X_1 写为 $\mathbf{x}$，把 X_2 写为 $R-\mathbf{x}$).

一实数是具有下列性质的有理数集 $\mathbf{x}$：

(a) $\mathbf{x}$ 与 $R-\mathbf{x}$ 都非空的．(b) $\mathbf{x}$ 没有最大的有理数．(c) $\mathbf{x}$ 中每个有理数小于 $R-\mathbf{x}$ 中每个有理数.

全体实数集 $\mathbf{C}$ 是所有这样的有理数集 $\mathbf{x}$ 的集。

这个定义是预先假定了已有一个全体有理数系统 R，并以这系统来作出实数的表示，由此可见，R 并不是作为所取得的系统 $\mathbf{C}$ 的子系统的.（如果把 R 的元素作为个体，则 $\mathbf{C}$ 的元素就是这些个体的集.）

我们今定义，如果 $R-\mathbf{x}$ 有一个最小的元素 x 则实数 $\mathbf{x}$ 叫做有理的，这时我们说 $\mathbf{x}$ 对应于(系统 R 中的)有理数 x，否则 $\mathbf{x}$ 叫做无理的.

实数中的有理数组成 $\mathbf{C}$ 的一个子系统 $\mathbf{C}_R$，它和原有有理数系统 R 是同构的(§ 8)，每当我们用这个表示来定义实数的某些概念(对有理数已经预先定义过的)时，便可以证实这点.

例 实数 $\mathbf{2}$ 是小于有理数 2 的有理数的集，$\mathbf{2}$ 和 2 是对应的. 实数 $\sqrt{\mathbf{2}}$ 是下列的有理数集，或则它为负的或则它的平方小于有理数 2 (这些有理数间没有最大的). 因为没有一个有理数的平方是等于 2 的(正如公元前六世纪时毕达哥拉斯 (Pythagoras) 所发现的)，所以 $R-\sqrt{\mathbf{2}}$ 便包含了一切其平方大于 2 的正有理数(在其中没有最小的)，故 $\sqrt{\mathbf{2}}$ 是无理的.

实数间的次序可如下定义：如果有一个有理数 r 在 $\mathbf{y}$ 中而不在 $\mathbf{x}$ 中，则 $\mathbf{x}<\mathbf{y}$.（试证 $\mathbf{C}$ 是被 $<$ 所线性排序的，又证 $(\mathbf{C}_R, <)$ 与 $(R, <)$ 同构.）

如果实数 $\mathbf{v}$ 满足：对于每个属于 $\mathbf{M}$ 的实数 $\mathbf{x}$ 都有 $\mathbf{v}\geqslant\mathbf{x}$，则说 $\mathbf{v}$ 是集 $\mathbf{M}$ 的一个上界.

(A) 如果一个非空实数集 $\mathbf{M}$ 有一个上界，它就有一个最小的上界 $\mathbf{u}$ ($=$ 上确界 $\mathbf{M}$).

证明 我们作出 $\mathbf{u}$，作为具有性质(a)—(c)的有理数集. 我们知道，$\mathbf{M}$ 是有理数集之集. 今把集 $\mathbf{u}$ 定义如下：一有理数 $r\in\mathbf{u}$ 当且仅当，有一实数 $\mathbf{x}$ 使得 $\mathbf{x}\in\mathbf{M}$ 及 $r\in\mathbf{x}$. 若用 §5 的记号则有 $\mathbf{u}=\mathfrak{S}\mathbf{M}$. 读者可以自己证明，$\mathbf{u}=$ 上确界 M.（即证明 $\mathbf{u}$ 是一实数，$\mathbf{u}$ 是 $\mathbf{M}$ 的一个上界，$\mathbf{M}$ 又没有其它上界 $\mathbf{v}<\mathbf{u}$.）

同样可以定义下界[1]. 如果实数 $\mathbf{x}$ 是有理的，可命 $\bar{\mathbf{x}}=\mathbf{x}+$

1) 及下确界(因下文也提到下确界)——译者注.

$\{x\}$;否则命 $\mathbf{\bar{x}}=\mathbf{x}$. 又以 $-\mathrm{x}$ 表示由有理数 $-r$(而 $r\in R-\mathbf{\bar{x}}$)所成的集.(如果 $\mathbf{x}$ 为有理数,则 $-\mathbf{x}$ 对应于 $-x$.)命 $-\mathbf{M}$ 表示由实数 $-\mathbf{x}(\mathbf{x}\varepsilon\mathbf{M})$ 所组成的集. 如果 $\mathbf{w}$ 是$\mathbf{M}$的一个下界,则 $-\mathbf{w}$ 为 $-\mathbf{M}$的一个上界. 故 $-\mathbf{M}$ 便有一个上确界,并且 $-$(上确界 $-\mathbf{M}=$ 下确界 $\mathbf{M}$).

设有两个实数 $\mathbf{x}$ 与 $\mathbf{y}$,命 $\mathbf{x}+\mathbf{y}$ 表示由有理数 $r+s$ ($r\in\mathbf{x}$ 及 $s\in\mathbf{y}$)所组成的集;命 $\mathbf{x}-\mathbf{y}=\mathbf{x}+(-\mathbf{y})$; 又命 $|\mathbf{x}|=\mathbf{x}$ 当 $\mathbf{x}\geqslant 0$ 时,而 $|\mathbf{x}|=-\mathbf{x}$ 当 $\mathbf{x}<0$ 时.(不要把$+$及$-$与集间的加减相混乱了,后者是用$+$及$-$来表示的.)

设有一无穷实数序列 $\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_n, \cdots$ 及一实数 $\mathbf{a}$, 如果对于每个实数 $\mathbf{e}>0$, 都有一个自然数 n_e, 使得对于每个 $n>n_e$ 都有$|\mathbf{a}_n-\mathbf{a}|<\mathbf{e}$,则说 $\lim\mathbf{a}_n=\mathbf{a}$. 例如 $\lim\mathbf{1/2}^n=\mathbf{0}$.(这里 $\mathbf{1/2}^n$ 为对应于有理数 $1/2^n$ 的实数.)

(B) 如果 $\mathbf{u}=$ 上确界 $\mathbf{M}$ (如(A)所述),则$\mathbf{M}$中有元素序列 $\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_n, \cdots$,使得 $\lim\mathbf{a}_n=\mathbf{u}$.

证明 设 $\mathbf{M}_n=$ 由属于 $\mathbf{M}$ 且 $>\mathbf{u}-(\mathbf{1/2}^n)$ 的实数所组成的集,(试证 $\mathbf{M}_n$ 非空.)令 $\mathbf{a}_n$ 为由 $\mathbf{M}_n$ 中选出的任何实数.(试证 $\lim\mathbf{a}_n=\mathbf{u}$.)

虽则在这理论中,解析学是"算术化"了,但算术与解析学之间的区别仍是非常显著的,因为在解析学中必须把算术中的客体的无穷集作为客体而使用.

§10. 函 数

就最一般的意义来说,一个变元 x 的(单值)函数 f 或 $f(x)$ 或 $y=f(x)$是一种对应,根据这个对应,对于某一集 X 的每一个元素 x 都对应于某一集 Y 的唯一的一个元素 y.

集 X 叫做自变元的变域或函数的定义域. 这函数可叫做由 X 到 Y 的函数(或以 Y 的元素为值以 X 的元素为主目的函数,或者由 X 的元素而产生 Y 的元素的运算,等等).

依变元 y 的或 $f(x)$ 的变域是指在对应中所用到集 Y 的元素所组成的子集 Y_1，即是说，根据函数 f 而对应于集 X 的某些元素的那些元素。这时 X 与 Y_1 之间便有多一对应，因为对于 X 的每一个元素都只对应于 Y_1 的一个元素，但 Y_1 的元素(一般说来)却对应于 X 的许多元素。X 的一个元素 x 叫做函数的主目或自变元的一值。相应的 Y 的元素 y 叫做函数的或依变元的相应值或者函数在该主目处的值。(有时"主目"意指"自变元".)

n 个变元 $x_1, \cdots, x_n$ 的(单值)函数 f 或 $f(x_1, \cdots, x_n)$ 或 $y=f(x_1, \cdots, x_n)$ 是一种对应，根据这种对应，对客体每一个有序 n 元组 $(x_1, \cdots, x_n)$，$x_1 \in X_1$，$x_2 \in X_2, \cdots$，$x_n \in X_n$，都对应于唯一的客体 y，$y \in Y$。n 元函数可以看作一元函数，这时，一切有序 n 元组 $(x_1, \cdots, x_n)$ 的类就作为集 X。我们可用相似的用语。例如，X_1 为 x_1 的变域，X_2 是 x_2 的变域，…，X_n 是 x_n 的变域。这里 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 可以全是同一的集，也可以是一些(甚至 n 个)不同的变域。由 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 所提出的特殊的元素序列 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 叫做主目组(或主目 n 元序组)。

在这种过多的术语中，我们可以看见根据两种观念而作的用语的混合：把函数当作多一对应的观念以及把函数当作一个变元 y，y 依另一个变元 x 而变，从而 y 的值总是由 x 的值来确定的观念。

第一个观念内容更为丰富，读者应该首先记得它。但是第二个观念却很自然地引出记法上的有用的约定，例如，如果"$f(x)$"表示自变元 x 的某个函数，而 a，b 等为自变元的值(即主目)，那末"$f(a)$"便表示在主目 a 处函数的值，"$f(b)$"表示当 $x=b$ 时函数的值等等。

因此我们应该注意"$f(x)$"可以有两个意义：1. 表示函数本身(即 X 与 Y_1 间的多一对应)。2. 当 x 表示该域中的一客体时，表示该函数的值(即 Y_1 的一元素 y)。当 x 未明指时，后者叫做该函数的一般值(未定值)。

例 1 当我们说"$x+y$ 是对称的"，这里"$x+y$"表示函数。

当我们说，“两自然数 x 与 y 的和 $x+y$ 应该是 $\geqslant x$ 的”，这时“$x+y$”不是函数而是一数(函数的未定值).

这种情况可用下法避免，即指函数时用“f”而不用“$f(x)$”，只要我们所谈论的每一个函数都已经引入了一个符号例如“f”，“g”，“+”或“φ”等. 但是标出自变元的记号对于命名那些由别的函数(及常数)而组成的函数来说却是很方便的，如“$f(g(x))$”，“x^2+3x”或“$\varphi(2,x)$”.

例 2 为了更详细讨论这点，设 f 与 g 为给定的一元数论函数，即由自然数集到自然数集的函数. 设 x 为任一自然数，那末 $g(x)$ 为一自然数，即以 x 为主目时函数 g 的值，而 $f(g(x))$ 为一自然数，即以自然数 $g(x)$ 为主目时函数 f 的值. 这时对任何自然数 x 言，另一数 $f(g(x))$ 是确定的. 故“$f(g(x))$”为一个新函数的未定值(即意义 2); 同时用这种记号来作为该新函数本身的名(意义 1)也是很方便的.

这里另外有一记号(邱吉(Church)[1932]引进)其中虽用到自变元但它却表示函数 f 本身而不是它的未定值，这便是“$\lambda xf(x)$”，对 n 元函数言则是“$\lambda x_1\cdots x_nf(x_1,x_2,\cdots,x_n)$”；例如，“$\lambda xf(g(x))$”，“$\lambda xx^2+3x$”，“$\lambda x\varphi(2,x)$”. 当需要特别注意时为强调起见我们将采用这种 λ 记号.

例 3 设 φ 是为二元函数，若果彻底使用这个 λ 记号，即只要是指函数而不是指它的未定值时便用 λ 记号，我们可以区别出：(a)数 $\varphi(x,y)$，(b)变元 x 的一元函数 $\lambda x\varphi(x,y)$，而 y 作为参数，(c)二元函数 $\lambda xy\varphi(x,y)$，x 为第一变元，y 为第二变元. (d)函数 $\lambda yx\varphi(x,y)$ 以 y 作第一变元，x 作第二变元. (e)变元 x 的一元函数 $\lambda x\lambda y\varphi(x,y)$，其值为另一变元 y 的函数，等等. (桑芬客尔(Schönfinkel)[1924]及邱吉把(c)与(e)等同，但对我们说来这并不是必然的).

对于函数 f 的任何一个主目 n 元组 $t_1,\cdots,t_n$ 言，都有

$$\{\lambda x_1\cdots x_nf(x_1,\cdots,x_n)\}(t_1,\cdots,t_n)=f(t_1,\cdots,t_n).$$

例如，$\{\lambda xx^2+3x\}(2)=10$，$\{\lambda x\varphi(x,y)\}(0)=\varphi(0,y)$，$\{\lambda yx\varphi$

$(x,y)\}(0,3)=\varphi(3,0),\{\lambda xy\varphi(x,y)\}(z,x)=\varphi(z,x)$.

我们已把一函数说成一个多一对应．我们可以进一步根据我们所研究的理论的种类而说出该多一对应是什么． 在集论术语中，这对应可以看作和由 X 与 Y_1 的各对应元素的全体有序对 (x,y) 所组成的集相等同．我们亦可以不说对应而说建立该对应的法则或规则，至少当这种法则或规则可以在某种意义上对每个函数都一一给出时．当 X 为有穷集时，函数可以用列表的形式给出．

例 4 设 X 与 Y 均是模 2 剩余系，亦即： $X=Y=\{0,1\}$. 函数 x' 与 $x\cdot y$ 可由下二表而确定：

x'

x	0	1
	1	0

$x\cdot y$

	y	0	1
x	0	0	0
	1	0	1

例如，由第二表可得 $0\cdot 0=0\cdot 1=1\cdot 0=0$ 及 $1\cdot 1=1$.

第三章 数学推理的批判

§11. 悖　　论

本章是想说出一些问题，由于这些问题才发生本书后面所要报导的研究，这里要报导的即在这些研究出现以前所出现的情形(暂时不管以后它产生了怎样的变化).

在解析学的算术化中(§9),无穷总体(例如：作出狄德金分划的下半的有理数无穷集或者无穷小数中的数字记号序列等等）是作为一个客体的,而所有这些客体所组成的集又当作一个新总体.由这便很自然地得出康托的一般集论了.

这些理论刚刚得到巩固,就在集论的边缘处发现了悖论,以至整个结构的有效性便被人怀疑了.

(A)布拉里-福蒂（Burali-Forti）悖论[1897*],康托在1895年亦已知之,这是在康托的超穷序数论中引起的[1].

(B) 在超穷基数论中亦出现有类似的悖论，尤其是康托悖论(1899年发现). 试考虑所有集的集;命为 **M**. 根据康托定理(§5定理C)有 $\overline{\overline{\mathfrak{U}\mathbf{M}}} > \overline{\overline{\mathbf{M}}}$. 又因**M**是所有集之集,而 $\mathfrak{U}\mathbf{M}$ 是一些集的集(即 **M** 的子集的集),故有 $\mathfrak{U}\mathbf{M} \subset \mathbf{M}$. 因此由定理A系 A，$\overline{\overline{\mathfrak{U}\mathbf{M}}} \leqslant \overline{\overline{\mathbf{M}}}$; 再由§3，不可能 $\overline{\overline{\mathfrak{U}\mathbf{M}}} > \overline{\overline{\mathbf{M}}}$. 因此我们证明了既是 $\overline{\overline{\mathfrak{U}\mathbf{M}}} > \overline{\overline{\mathbf{M}}}$ 又不是 $\overline{\overline{\mathfrak{U}\mathbf{M}}} > \overline{\overline{\mathbf{M}}}$.

由同样的**M**出发，我们又可用下法而达到悖论. 根据定理C对于**M**的每个元素 M,即对每个集 M,**M** 都有另一个元素 M',即 $\mathfrak{U}M$，使得 $M \leqslant M'$. 因此由定理D对 **M** 的每个元素M有 $\overline{\overline{M}} < \overline{\overline{\mathfrak{S}\mathbf{M}}}$. 但**M**是所有集的集,因此 $\mathfrak{S}\mathbf{M}$ 是**M**的一个元素. 如果就把这

1) 即由讨论一切序数集的序型而引起的. 见豪斯多夫集论[1937，65]——俄译注.

个元素 $\mathfrak{S}\mathbf{M}$ 代入上述已证明了的不等式中的M去，那么我们得 $\overline{\overline{\mathfrak{S}\mathbf{M}}}<\overline{\overline{\mathfrak{S}\mathbf{M}}}$. 但由§3,对任何集 M,都没有 $M<M$;因此特别是没有 $\overline{\overline{\mathfrak{S}\mathbf{M}}}<\overline{\overline{\mathfrak{S}\mathbf{M}}}$.

如果我们从所有基数的集出发,而作为$\mathbf{M}$的则选取如下的集,对于每个基数，它都含有具有该基数的一个集 M，那末我们亦得到关于 $\mathfrak{S}\mathbf{M}$ 的悖论.

如果我们认为具有随意元素的集这个概念太过含混因而是非数学的,我们可以把集的可允许的元素指定限于:(a_1)自然数 0,1,2,…(或(a_2)空集 O)及(b)由可允许元素所组成的随意一集.在这个指定之下,上述的悖论及下面一个悖论同样发生.(对(a_1)言见坚钦(Gentzen)[1936]).

(C)罗素悖论[1902—1903*]. 蔡梅罗(Zermelo)亦独立发现它,它处理所有不是自己的元素的集所组成的集. 设该集为 T.试问T是否自己的元素?

为了论证起见,试设T为自己的元素,即设 $T\in T$. 该假设说T是T的元素,那便无异说,T是所有不是自己的元素的集所组成的集的元素,即T这个集不是自己的元素,亦即 $T\notin T$. 这与原设 $T\in T$ 相矛盾. 直到这里我们还没有得到悖论. 因为在 $T\in T$ 与 $T\notin T$ 之间的矛盾乃由假设 $T\in T$ 而引起的. 根据反证法,我们可以说,这个假设是假的. 因此我们可以无需任何假设而直接得到结论 $T\notin T$.

由所得到的事实 $T\notin T$,我们可以推下去. 这事实说,T不是所有不是自己元素的集所组成的集的元素，即T这个集决非不是自己的元素,即T这个集是自己的元素[1)]，亦即 $T\in T$. 现在 $T\notin T$ 与 $T\in T$ 同时成立了,因此我们得到悖论.

这个悖论是可由康托悖论导出的. 如果我们指定只有(a_2)与(b)为可允许的元素,因此各个集只能以集为元素,那么当 $\mathbf{M}$ 为所有集之集时，$\mathfrak{U}\mathbf{M}=\mathbf{M}$,而罗素悖论中的集$T$则由于把§5引理A的证明应用于 $\mathbf{M}\sim\mathfrak{U}\mathbf{M}$ 的恒等一一对应而得到，在这个一一对

1) 不用双否定规则,仍是可以的——俄译注.

应中M的每个元素在 $\mathfrak{U}$M 中对应于它自己.

这个悖论可通俗化如下(罗素[1919]). 某一村落中的一个理发匠,他只替村中所有不给自己理发的人来理发,到底他是否替自己理发?(当然在这里我们可以避免悖论,只须结论说永不会有这样的一个理发匠。)

荷兰的每个市区都有一个市长而且没有两个市具有同一市长. 有时可以该市长不是该市的居民. 假设通过了一个法律,指定一个特别地区 S 专供这些非居民的市长居住,并强迫所有的非居民市长居住在那里.

又假设非居民市长有这么多使得 S 又须建成一个市区. 试问 S 的市长须住在那里? (曼奴里 (Mannoury), 参见凡但泽 (van Dantzig) [1948].)

假设国会图书馆编辑一本图书目录作为该馆图书之一,其中专门记载该馆的所有不记载自己的图书[1] (贡塞士 (Gonseth) [1933]).

罗素又指出如何可以把他的悖论用逻辑术语表示而不用集合论术语. 一性质叫做'自谓的'[2]如果它可施用于自己,'非自谓的'如果它不能施用于自己. 例如"抽象"性质是抽象的,故是自谓的,但"具体"仍是抽象的而非具体的,故是非自谓的. 那末'非自谓的'这性质到底是哪一种?

(D)理沙尔 (Richard 悖论) [1905],狄松 (Dixon) [1906] 实际上亦给出了它,它处理可有限定义性这个概念. 为确定起见,试就一定的语言而立论,例如具有指定的字母表、字典及文法的英语立论. 作为字母我们是指包括空位(用以隔开两字)和 26 个拉丁字母以及句号. 这语言中的'表达式'是指这 28 个符号所组成的有限序列,但须不以空白为起首. 因此英语中的表达式可以依照在 §1 末我们枚举代数方程的那种办法来枚举.

一表达式可以确定一个一元数论函数 (即自然数的函数而以

1) 试问该图书目录是否记录自己? ——译者注.
2) 原文为 predicable,与 §12 的"直谓的" (predicative) 不同——译者注.

自然数为值的). 在上述的对英语的一切表达式的枚举中,如果删除那些不确定一元数论函数的,我们便得到那些确定一元数论函数的表达式的枚举了(即得 E_0, E_1, E_2, ··· 它们确定函数 $f_0(n)$, $f_1(n)$, $f_2(n)$, ···).

今考虑下列表达式[1]:"一函数,当以任一给定的自然数为主目时,它的值如下确定,在上述的枚举中,把对应于该自然数的函数以该自然数为主目时所具有的值再加 1"

在所引的表达式中我们只引用英语中定义一数论函数的表达式的上述枚举法而未曾对它作出定义. 但我们极容易把该枚举法的定义完全写出,作为所引的表达式的一部分. 这时我们将从英语的表达式而得到一个函数(简单地,便是 $f_n(n)+1$)的定义. 依据定义,这个函数必然与能够由英语表达式而定义的每一个函数彼此不同.

这个悖论由于它牵涉到例如英语这种语言,还由于它与康托对数论函数不可数性的证明(§2)非常类似而特别具有兴趣. 理沙尔所给出的悖论则以实数的定义形式而出现,它与康托对实数不可数性的证明相平行.

试考虑下表达式:"不能够由少于二十二个字而命名的最小的自然数". 这表达式用二十一个字而确定了一个自然数,但依照定义,该自然数是不能由少于二十二个字而确定的! (贝利(Berry)[1906])

(E)这些近代悖论,尽管多少都与集论有些关系,但它们却与非常古代的一个悖论相连着的.

"克里特人总是说谎者···"这句话据说是由克里特的哲学家埃皮曼尼德 (Epimenides) (公元前六世纪)所说的. (这句话由保罗(Paul) 在"提多书" ("Epistle to Titus") I, 12 中所引述,说是由克里特的一个"先知"所说的,根据更近的材料,早期基督教的传统是把这位"先知"和埃皮曼尼德等同的. 参见外尔 (Weyl) [1949], p. 228)

1) 读者可想像下述一段话是用英语表达的——译者注.

假如我们区别两类说谎者：第一类说谎者有时还说真话而第二类说谎者则永远只说谎话．假设我们解释埃皮曼尼德的话是指所有克里特人是第二类说谎者．如果这句话是真的，由它所指的以及他本人是克里特人的事实，它必是假的．这是一个矛盾，故依反证法，这句话必须假．但这句话的虚假性便要求曾经有或者目前有一个克里特人他有时说过真话．如果这句话是所有克里特人所说过的唯一的一句话，我们便将得到一个悖论了．如果我们想依靠下列历史上偶然事实，即有些克里特人曾经有时说过真话，来解脱这个悖论，在逻辑上是不够满意的．

埃皮曼尼德悖论又名说谎者悖论可以改成下列的严格形式，如果一个人简单地说"我现在说的这句话是谎话"，这句话不能够真也不能够假除非得出矛盾．这个形式的悖论是欧布里德(Eubulides)(公元前四世纪)作的，它在古代也是众所周知的(参考吕斯多夫(Rüstow)[1910]．如果"克里特人常常是说谎者…"的确不是埃皮曼尼德说的或者当初并不看作悖论的，那末说谎者悖论的欧布里德形式将比"说谎者克里特人"形式出现更早。)

古代有"鳄鱼难局"，说一条鳄鱼偷了一个孩子，鳄鱼允许把孩子还给他的爸爸，如果他把鳄鱼将归还孩子与否这个问题猜得正确．设该爸爸猜测说鳄鱼不还孩子，鳄鱼该怎么办？(参见普兰特尔(Prantl)[1855]，p. 493)

下述的谜话也引到悖论．一旅行者到生番当中．他们给他一个机会说一句话，条件是，如果他的话真确他将被煎，如果他的话不真，他将被烤．问这个人应该怎样说呢？(这样的谜语亦见于塞万提斯(Cervantes)唐吉诃德传(1605) II. 51中)

§12. 由悖论得出的一些初步推论

读者可以自己试行解决这些悖论．自从这个问题提出以后有半世纪的时间始终没有一个一致赞同的解决(答案)．

最简单的解决将是找出一些特殊的错误，正如在学生的代数

练习或几何证明中找出错误那样，而不必改变其他一些什么东西。

当开始考虑这些悖论时，自然会引起照这办法去解决悖论的各种想法．我们可以说在悖论(A)—(C)中错误在于用到太大的集，例如所有集的集或所有基数的集等等；或者在于允许把集考虑作它自己的元素，而这点同样又否认了所有集的集．这些提示不一定是错误的，但它们到底也不是简单的．它们给我们留下一个问题，在一个激烈改变了的基础上重新建立集论，其详细情况却不是这些提示所完全说出了的．例如，如果我们禁止所有基数集，我们便不能够引入所有自然数集，除非我们已经知道它们并非所有基数；在以后的阶段中亦将发生同样的困难．如果我们禁止所有集的集，我们便将与康托关于集的定义相冲突．为了要有集论，我们必需有关于所有集的定理，根据康托定义，这所有集便组成一集．不然，我们必须说明将改用什么样的关于集的定义，或者我们必须对康托的定义补充以一些准则来确定到底康托定义中所提到的总集什么时候才组成一集(斯科林(Skolem)[1929—30])．

公理集论　重建集论可如下来做，即在集的概念之上加上一些限制用以排除太大的集，这是为了阻塞已知的悖论所必需的．因为在康托定义之下自由地应用我们的概念来构成集这一点引到了灾难，因此集论的概念须受制于公理，正如欧氏平面几何的“点”“线”的受制一样．公理集论的第一个系统是蔡梅罗的([1908])．在集的公理处理中加以改进的是弗兰克尔([1922, 1925])，斯科林([1922—3, 1929])，冯奈曼([1925, 1928])伯尔奈斯(Bernays)([1937—48])及其他人．解析学可以建立于公理集论之上，这或许是悖论发现以后能够对现存数学所作的最简单的基础．与公理集论有关的曾经有一些非常有趣的发现，尤其是斯科林([1922—3]，参见§75)及哥德尔([1938, 1939, 1940])[1]．

更广泛的数学基础问题　假设在集论公理化中悖论是避免了——关于这点我们所得到的保证只是消极的，即迄今尚未遇见悖论——它是否把悖论所引起的问题完全解决了呢？

1) 又见诺维科夫(П. С. Новиков)[1951°]——俄译注。

关于几何学的情形，自从非欧几何发现后数学家已经理解到，可能有多种空间. 公理系统可用以划分出这种或那种空间，或者划分出一些空间的公共特征以供几何学家的研究. 在形式公理论中出现矛盾，那只能说是一些无法实现的特性组合被假设了.

但就后来导致了集论的算术与解析学而言，这两者在现代的批判时期以前数学家却认为它们是处理一些依发生法而得出的客体系统，并用定义以完全确定它们的结构的. 定理则被认为是表示有关这些系统的真理而不是假定地(条件式地)用于任何(如果有的话)满足这些公理的客体系统的. 既然如此，在这些科目中，为什么会出现矛盾呢? 除非在逻辑中有缺点，除非在我们以前所依赖的用以构造及推论数学客体的方法之中有错误.

现在即使说这些科目应该改建在公理基础之上，但并没有解决这个问题. 在公理化以后，必然在某些地方仍存在真和假. 如果公理是非形式的，这些公理必须真确. 如果公理是形式的，至少我们必须相信这些定理是由公理推出的，又必须相信在这些结果(即定理)与公理理论以外的现实之间必有一些关系，除非数学家的工作毫无意义. 形式公理化的数学命题并不能构成全部数学; 必须也有一种直觉地理解的数学. 如果我们必须放弃以前的信仰，不再相信它包含了全部算术，解析学及集论，那末我们必须知道这种信仰的错误所在以及这两部分分界线所在，我们才能满意.

因此消除悖论这个直接问题现在便湮没于数学与逻辑的基础这个更广泛的问题之中了. 数学真理的本质是什么? 数学命题有什么意义? 它们建基于什么证明之上? 即使在数学的边缘上没有出现悖论，上述这个广泛的问题或综合性问题也是哲学所研究的问题. 从历史上看，悖论出现这件事只使得数学家比以前更加强烈地研究这个问题罢了，而悖论则显然地对解决这个问题提出了条件[1).

---

1) 一些有趣的阐明悖论问题真相的结果，可参见波兹瓦(Д. А. Бочвар)[1938°，1944°]及诺维科夫[1947°]——俄译注.

非直谓[1]的定义　如一集M与一特定客体m用下法定义，一方面m为M的元素另一方面m的定义依赖于（用到）M，我们说这个过程（或m的定义或M的定义）是非直谓的．类似地，如果一客体m具有性质P但m的定义却依赖于P（这里M便是具有性质P的客体的集），那末相应的定义也是非直谓的．非直谓定义是循环的（Circular），至少表面上如此，因为被定义的东西已经渗入到它的定义里面去了．

在§11中的每个悖论都用到非直谓定义．在（B），所有集的集**M**把由**M**而定义的集 $\mathfrak{U}$**M** 及 $\mathfrak{S}$**M** 作为元素．在罗素悖论（C）中，如果我们把T如下定义，那末非直谓过程便出现了．我们把所有集的集**M**分成两类，第一类由那些包括集自己作为元素组成的，第二类（即T）则由不包括集自己作为元素所组成的．然后我们把T（这是由把**M**分成两部分而定义的）放回**M**中而问它落在**M**的那一部分之内．在理沙尔悖论（D）中，英语中能够作为某一函数（实数，自然数）的定义的那些表达式的总体是包含有所引的表达式的，但所引的表达式却提到该总体．在埃皮曼尼德悖论（E）中，所有句子的总体区分成两部分，真句子及假句子．论及这个区分的句子却被当作在该原来总体之内，因为我们问到底它是真抑假．

庞恩加来（[1905—6，1908]）断言，悖论的原因便在于这些非直谓的定义；罗素（[1906，1910]）在他的恶性循环原则中亦宣布同样的解释，这原则是：没有一个总体能够包含下列两种元素：它只能由该总体而定义，它或者包括或者预先假定该总体．这样看来我们已经对于悖论有一个充分的解决而且也有适宜的见识了，只是出现一个情况：我们想保存的数学中，有些部分，尤其是解析学，是含有非直谓的定义的．

例如下定义 **u** ＝ 上确界 **M**（§9.（A））．在实数的狄德金分划定义中，所有实数集 **C** 是由具有性质（a）（b）（c）的有理数集 **x** 所组成的集．这个总体已经分成两部分，**M**与 **C** － **M**．我们定义 **u**

1）原文为 impredicative，与§11的“非自谓的”（impredicable）不同——译者注．

为 $\mathfrak{S}$**M**，然后又把集 $\mathfrak{S}$**M** 当作 **C** 的元素，在一般情况 **u** = $\mathfrak{S}$**M** 的定义是依赖于 **C** 的，因为在一般情形，**M** 将是由 **C** 而定义的，即由 **C** 中具有某些性质 P 的元素所组成的集.

我们或许为维护这个非直谓定义而解释说，它并不是第一次定义或创造实数 **u**（在这种解释下，实数集 **C** 的定义便是循环的了），而只是从已经存在的实数集 **C** 中把一个特殊数 **u** 挑选出来罢了. 但是同样的论证亦可以用来支持悖论中的非直谓定义.

外尔的构造性连续统　在解析学中某些定义的非直谓性质曾经被外尔特别强调过，他在《连续统》（[1918]）一书中想找出如果不用非直谓定义，解析学有多少部分可以重新建立起来. 我们可以给出一大堆运算用来构造非常多种的无理数. 这样外尔便能够获得解析学的相当大的部分，但是，得不到如下定理，任何一个不空实数集**M**如果有一上界则有一个最小上界（参见外尔[1919]）.

在数学基础上引起了三大派别：(i) 逻辑主义派（罗素、怀特黑（Whitehead）、英国人）(ii) 直觉主义派（布劳维（Brourver），荷兰人）(iii) 形式主义或公理学派（希尔伯特，德国人）（对逻辑主义有时不用 logicistic 而用 logistic，但 logistic 又有另一意义，见 §15）这三大分类并没有包括下列的各种不同的观点，即或者它们没有那么广泛地被研究，或者它们很少重建数学或者较少有哲学以支持它.

逻辑主义　逻辑主义者的论点是：数学是逻辑的一个分支. 数学的概念须用逻辑的概念而定义. 数学的定理须作为逻辑的定理而证明.

莱布尼兹（Leibniz）（1666）首先把逻辑理解为包含其他一切科学所依据的观念及原则的一门科学. 狄德金（[1888]）及弗雷格（[1884, 1893, 1903]）则用逻辑的概念而定义数学的概念，而皮亚诺（[1889,1894—1908]）则在逻辑的符号体系内表示了数学定理.

为了说明数学概念如何可以由逻辑概念而定义，让我们先承认弗雷格-罗素的关于基数的定义（§ 3），又承认基数 0 及基数 $n+$

1 (对于任何基数 n)的定义(§ 4). 那么有限基数(或自然数)可以定义为一个基数具有每一个满足下列条件的性质 P 的,(1) 0 有性质 P(2)当 n 有性质 P 那末 $n+1$ 亦有性质 P. 简单地说,自然数被定义为满足数学归纳法的基数. 这里的观点与 §6, §7 的观点大不相同,在那里我们预先假定自然数列的直觉概念,由它而抽出一原则,只要给出一个满足(1) (2)的关于自然数的性质 P,那末任何给定的自然数都具有性质 P. 而这里我们预先假定基数的所有性质的总体,在定义自然数列以前在逻辑上先已存在着. 注意,这个定义是非直谓的,因为所要定义的性质,即为一自然数,是属于基数的性质的总体的,但后者却在定义中出现了.

为了使数学的逻辑主义式的构造能够和发现悖论有关的情况相适应,罗素用他的分支类型论([1908, 1910])[1]而排除非直谓的定义. 大体说来,其理论如下. 原始客体或个体(即给定的不作逻辑分析的东西)指定属于一型 (例如型 0) 而个体的性质属于型 1, 个体的性质的性质属于型 2,等等; 任何性质都必须属于这些逻辑类型之一(例如,这便把§11的"自谓的""非自谓的"这两性质逐出逻辑范围之外了). 再详细一些便须指出对其它客体如关系及类[2]等所允许的类型.然后,为了在同一类型之内排除了非直谓定义起见,在型 0 以上的型又再细分为级. 例如,就型 1 言,不提到任何总体的性质便属于级0,而用到某级性质的总体而定义的性质便属于更高一级. (自然数的逻辑主义式定义这时便变成直谓的了,如果把其中出现的 P 明指为历经某级的性质而变,这时,为一自然数

---

1) 又见希尔伯特-阿克曼 (Ackermomn) [1928]——俄译注.

2) 每一类都和下列性质同属于一型, 该性质对该类的元素亦只对该类的元素成立. 至于 n 元($n>1$)关系,则当该关系的第 p 个变目具型 i_p ($1\leqslant p\leqslant n$) 时该关系具型 ($i_1, i_2, \cdots, i_n$). 这样, 关系的型便不是一数了. 但亦可不引进这样的型而引进 n 层数, 即当 $n>2$ 时把$\langle x_1, x_2, \cdots, x_n\rangle$定义为$\langle x_1, \langle x_2, \cdots, x_n\rangle\rangle$, 而$\langle x, y\rangle$则定义为$(x, (x, y))$,这样关系论便化归为类论了,并具有自然数的型了. 参见希尔伯特-阿克曼数理逻辑基础, 莫斯科外文出版社, [1947], p. 192, p. 199, 哥德尔[1940]. 这里所述的分支类型论 (按这里所述是简单类型论, 不是分支类型论——译者注.) 在细节上和希尔伯特-阿克曼的层次演算并不相同——俄译注.

这个性质便属于更高一级了.)但是这种区分为级的办法却不能构造出通常的解析学,我们上面已经看到,解析学是用到非直谓的定义的. 为了避免这个结果,罗素又假定可化归性公理,说对于任何不属于 0 级的性质都一个相同外延的(即被完全同样的客体所具有的)属于级 0 的性质. 如果只是可定义的性质才算作存在的话,那末这公理的意思便是说,在已给的型内对每个非直谓的定义都有一个等价的直谓定义.

在怀特黑与罗素《数学原理》中(三卷[1910—13])便以这说法为基础而在逻辑符号体系内把数学作为逻辑的一个部门而推出. 这本书对于符号逻辑后来的发展产生了巨大的影响.

这种由逻辑到数学的推演是作为直觉的公理学的. 其公理是希望大家当作关于世界的可信的假设而相信或至少接受的.

困难点在于:有什么根据要我们相信可化归性公理?如果性质是须构造的,那么问题的解决须依靠构造而不能依靠公理,正如著者们在书的第二版(1925)的引言中所承认的:"这个公理纯粹只在实用上得到辩解,由它可以得到所要求的结果而得不到其它[迄今所知]. 但显然它不是我们可以认为满意的那种公理".

蓝赛(Ramsey)[1926]发现,若删除级的区分(即用简单类型论)看来似乎可以得出所求的结果而得不到其他.他把已知的悖论分成两类一种现在叫做'逻辑的'(即布拉里-福蒂的、康托的、罗素的),另一种叫做'认识论的''或语义学的'(Semantical)(即理沙尔的及埃皮曼尼德的);他指出逻辑悖论可由简单类型论而防止,语义学的则(看来)可在一符号语言中防止. 因为在那种语言中缺少了要求叙述同一语言的表达式的那些工具. 但是蓝赛对同一类型中的非直谓定义而作的辩解时,其论证隐含着:该类型中所有谓词的总体这种概念是独立于它们的可构造性[1]或可定义性而存在着的.这种论证被叫做"神学的".因此无论罗素、怀特黑,无论蓝赛都没有能够构造地达到逻辑主义的目的. (朗福(Langbord)[1927]与卡纳普(Carnap)[1931—2]有一种有趣的建议用以辩

1) 即它们可用上述工具作出的——俄译注.

解在同一类型内的非直谓定义的，但这种建议也未能克服困难.）

外尔[1946]说，在《数学原理》的系统中，“数学不再建立于逻辑之上而是建立在逻辑学家的某种天堂之上…”；他指出任何相信这种“超越世界”的人亦可以接受公理集论的系统（蔡梅罗，弗兰克尔等等），对推演数学说来，后者实有结构简单的优点.

逻辑主义者把自然数列的存在当作是关于现实世界的假设（‘无穷公理’）. 对于无穷问题，直觉主义者（§ 13）及形式主义者（§14）有着完全不同的处理.

从直觉主义者及形式主义者的观点来说，（抽象的）自然数列实比基数的概念更初等也比基数的所有性质这个概念更初等，后两者是当逻辑主义地刻划自然数列时必须用到的.

最后，逻辑主义的论点亦可如下地诘问：在逻辑的表述中，已经预先假定数学的观念. 照直觉主义者看来，在复迭这个观念中已经含有数学的基本核心了，而在描述类型的谱系或由前提而作推演的概念中复迭这个观念是必须用到的.

逻辑主义者的最近著作是奎因（Quine）[1940*]. 哥德尔[1944]对逻辑主义者的思想观点作了批判的但同情的讨论，至于入门式的著作可见罗素[1919]及布拉克（Black）[1933].

§13. 直 觉 主 义

在 1880 年正当外尔史特拉斯、狄德金及康托的方法发育成长时，克伦涅客（Kronecker）严厉地批评说，他们的基本定义只是一些空话，因为他们并不能够使人们可以决定一个给定的客体是否满足该定义.

庞恩加来（[1902, 1905—6]）曾把数学归纳法看作在直觉的数学推理中一个不可再行化归的工具，因此他亦是近代直觉主义派的一个先驱.

布劳维（Brouwer）[1908]在一篇论文“逻辑原则的不可信任”中批评了下述的信仰，即实际上由亚里士多德（Aristotle）（公元

前 384—322）流传到今的古典逻辑的原则是绝对有效的，与它们所施用的对象无关．试引外尔［1946］的话："根据他的见解又看看历史，可以知道古典逻辑是从有穷集及其子集的数学中抽象出来的，…．后来人们忘记了这个有限的来源了，误把逻辑当作高于一切数学的东西，最后又毫无根据地把它应用到无穷集的数学上去．"

有两个显明的例子可以说明对有穷集有效的原则未必可以用于无穷集．第一个原则是全部必大于任一真部分，当应用于两集间的一一对应时（§1，§3，§4）．另一个原则是任一自然数集必有一最大数．

对有穷集有效的古典逻辑原则而布劳维认为不能用于无穷集的是排中律．这规律的一般形式是，对每个命题 A 言，或 A 或非 A．今设 A 为如下命题：在集（或区域）D 中，有一元素具有性质 P．那末非 A 便等价于 D 的每个元素都不具有性质 P，换句话说，D 的每个元素都有性质非 P．对这命题 A 应用排中律便得出，或者 D 有一元素具性质 P 或者 D 的每个元素都有性质非 P．

为确定起见，设 P 为这样的一种性质，使得对 D 的每个给定的元素言，我们都可以决定该元素具有性质 P 与否．

今设 D 为有穷集．这时我们便可以把 D 的元素依次考查，因而或则发现一元素具有性质 P 或则验出所有元素都有性质非 P．但也可以有实际上的困难，例如当 D 是非常大的集具有亿兆的元素，或者甚至当 D 为小集但要决定一给定的元素是否具有性质 P 时仍可能是很麻烦的．但最终必作完这个探讨的可能性在原则上却是存在的．由于存在这个可能性所以布劳维认为当对有穷集 D 以及上面这样的一种性质 P 而作推理时，排中律是一个有效的原则．

对无穷集 D 言，情况却有根本的改变．要对整个集 D 作通盘探究在原则上已不再可能了．

对无穷集 D 的所有元素而作探究虽是不可能的，但有时亦可对所提出的问题作数学的解决，即对于某些 D 及某些性质 P，可以

在D中找出一元素,具有性质P的;在别的情形则可以用数学推理而指出D的每个元素都具有性质非P,例如,用假设D的任意一个(即未明指的)元素具有性质P便引出矛盾的方法.(第二种解决的例子如,D为正整数的全体有序对偶(m, n)集,而P为如下性质:对偶(m, n)满足$m^2 = 2n^2$. 其结果是:毕达哥拉斯发现了$\sqrt{2}$是无理数.)这种代替办法由布劳维看来亦不足以挽救排中律.因为我们没有理由肯定说在一般情形之下我们都有可能获得这两种解决中的一种.

这可由现代数学史中提出一例子,即费玛(Fermat)的"最后定理",它肯定说,对于$n > 2$,方程式$x^n + y^n = z^n$对x, y, z, n言没有正整数解.(对$n = 2$则有正整数x, y, z的三元序组适合它,并叫做勾股弦数[1],例$x = 3, y = 4, z = 5$或$x = 5, y = 12, z = 13$.)这里D是所有正整数的四元序组(x, y, z, n)的集.而$n > 2$,P则是如下性质:四元序组(x, y, z, n)满足$x^n + y^n = z^n$. 大约1637年光景,费玛在巴舍(Bachet)的《狄奥番土》一书的页边上写道,他已发现一个的确奇妙的关于这条"定理"的证明,可惜书的页边太小了以致写不下来.尽管后来人们花费了大量的精力,始终没有人能够证明或反证这条所谓"定理";而且我们也缺乏一种方法,原则上若照这种方法做下去我们终于能够决定其真假的.(详情参见凡迪维(Vandiver)[1946].)

布劳维之所以对于无穷集D不接受排中律并不是因为迄今为止数学家们不能够解决这个或那个特殊问题.要对付他的反对,必须提出一个方法,不但在原则上可以解决所有一切仍未解决的数学问题,而且要能够解决一切将来可能提出的问题.这一种方法会不会能够找出呢?目前我们暂时让读者去猜想,在本书后面我们还再讨论到这个问题(§ 60).

在布劳维的批判以前所发展的、或者不顾布劳维的批判而发展的通常数学,其方法及其逻辑,我们将叫做古典的;布劳维及其

1) 原文为"毕达哥拉斯数"——译者注.

学派所允许的数学，其方法及其逻辑，我们将叫做直觉主义的[1]．古典数学中包含有直觉主义的一部分，又包含有非直觉主义的一部分．

由外尔史特拉斯，狄德金及康托的理论而达到顶点的非直觉主义数学和布劳维直觉主义数学之间，对于无穷的观点有本质的差异．前者把无穷当作现实的、完备的、广延的或存在的．无穷集被当作一个完备的总体而存在着，与人类产生它或构造它的过程无关，好似它能够完全的伸张于我们的眼前一样．对直觉主义数学说来，无穷只是当作可能的、变成的或构造的．在无穷量方面，这个区别早已被高斯看出了，他在 1831 年写道，"我反对…把无穷量当作一个完备的东西而使用，这在数学中是绝不允许的"（全集 XIII, p. 216）．

根据外尔[1946]，"我想毫无疑问的，布劳维弄清楚了下面这一点，没有任何明证再支持下列的信仰：把所有自然数的全体当作是具有存在的特性的，….自然数列既已超出由一数而跳到下一数这步骤所已达到的任何阶段，它便有进到无穷的许多可能；但它永远留在创造的形态中，绝不是一个自身存在的封闭领域．我们盲目地把前者变成后者这是我们的困难的根源，悖论的根源地也在这里——这个根源比之罗素的恶性循环原则所指出的具有更根本的性质．布劳维打开了我们的眼睛并使我们看见了，由于相信了超出一切人类的真实可行的'绝对'之故，以致古典数学已经远远地不再是有真实意义的陈述句以及不再是建基于明证之上的真理了"．

布劳维对于把古典逻辑应用到无穷集 D(比如说，自然数集）去所作的批评便是由于对无穷有这样的观点．如果我们考虑直觉

1) 虽则这样的数学的基础实际上是由布劳维所领导的直觉主义学派所建立的，但多数著者(包括本书著者在内)所使用的用语"直觉主义数学""直觉主义逻辑"等不应认为是完全正确的，因为这些用语所指的正面内容通常(例如在本书内)并不与直觉主义哲学有任何关系．较正确地以说"构造性数学""构造性逻辑"为妥——俄译注．(又按本书中"直觉的"一词指"非形式的、内容的"，与"直觉主义"无关，读者不要混乱——译者注)

主义者对于各种形式的陈述句所理解的意义时，我们将更看得清楚了.

一个全称陈述句，所有自然数 n 有性质 P,或简单地,对所有 $n,P(n)$,直觉主义者是理解为一种假设性的断言，意指，如果给出任何一个特殊的自然数 n,我们都可以保证数 n 具有性质 P. 这种意义并无需我们采取古典的观点,即把自然数集看作完备的无穷.

直觉主义用以证明关于自然数的全称命题的方法，数学归纳法便是其一. 对以下命题,对所有 n 有 $P(n)$,而作的归纳证明只是对由 0 至 n 间的数作推理，它却可以保证任何给定的 n 都将有性质 P(§7). 当然某个归纳证明要算是直觉主义的，还须它的奠基及它的归纳推步的推理都是直觉主义的.

至于存在陈述句,有一自然数 n 具有性质 P, 或简单地有一 n 使得 $P(n)$，它的直觉主义意义是作为如下这句话的部分消息（或这种句的抽象）：它给出该具有性质 P 的自然数 n 的具体例子,或者至少给出一个方法使得原则上可以找出这个具体例子来[1].

因此对如下命题,有一 n 使得 $P(n)$,所作的直觉主义证明,必须在下述的(严格的)意义下是构造的. 这证明须实际上作出这样的一个 n 的具体例子,它使得 $P(n)$，或者至少给出一个方法使得原则上可以找出这个具体例子.

在古典数学中,常有非构造的或间接的存在证法,而为直觉主义者所不接受的. 例如，要证明有一个 n 使得 $P(n)$，古典数学家先假设所有 n 都非 $P(n)$ 从而引出矛盾来. 无论从古典的或直觉主义逻辑看来，根据反证法这时都可得出： 不是所有 n 都非 $P(n)$[2]. 古典逻辑允许把这结果变成：有一 n 使得 $P(n)$，但(一般说来)直觉主义的逻辑则否. 这样的一个古典的存在证明,对于具体给出一个满足 $P(n)$ 的 n 这点来说,比之在证明以前并没有前进

1) 诺维科夫[1939,1943](参见俄译本附录 VII)证明了,在某些条件之下可以从非构造性的存在证明得出构造性的证明——俄译注.

2) 郭尔莫哥洛夫 (А. Н. Колмогоров) 发表了一个意见，认为对彻底的构造性(直觉主义)观点说来,要对全称性命题(即具有下形的命题,‘对所有 $n,P(n)$’)的否定看作一个确定的命题,一般说来是没有意义的——俄译注.

一步(虽则有时我们可用别的方法来找到它). 直觉主义者不愿意接受这样的存在证明，因为对他们说来，结论有一 n 使得 $P(n)$ 必须是存在一个具体的 n 的例子使得 $P(n)$ 才成，而这样一个具体的例子目前还未得到. 至于古典的说法：说在所有自然数的完备的无穷总体之中总在某些地方有一个 n 使得 $P(n)$，这对直觉主义者是没有效的，因为他们不把诸自然数看作一个完备的总体.

作为非构造的存在证明的另一例，试设对于某一性质 P，已经用直觉主义方法指明，如果费玛的"最后定理"是真的那么 5013 这个数具有性质 P，又如果费玛"最后定理"是假的，那么 10 这个数具有性质 P. 在古典意义上说，这便已经足以证明总有一数 n 使得 $P(n)$，但既然"最后定理"的问题还没有解决，布劳维将不能承认这个存在证明，因为它没有给出一个具体例子. 我们不知道 5013 是否一个这样的例子，也不知道 10 是否一个这样的例子，更没有任何办法可以原则上得到一个具体的数 (即除却由于计算过程太复杂致不能实现以外)使我们能够确信这个数就是一个例子. 布劳维只承认，由上面所说的不过证明了下列的蕴涵句 (或条件句)：如果 F 或非 F 那末便有一 n 使得 $P(n)$，这里 F 表示：对所有 $x, y, z > 0$ 及 $n > 2$ 言，$x^n + y^n \neq z^n$. 古典数学家可以应用排中律而推出该蕴涵式的前提 F 或非 F，因而便能推得结论有一 n 使得 $P(n)$. 不过就目前的知识情况言，布劳维并不承认该前提 F 或非 F 是已经知道的.

正如这例子所表明的，在作定义时，亦和作证明时一样要区别直觉主义方法和非直觉主义方法. 就我们今天的知识情况言，布劳维不承认下列的定义是某一个自然数 n 的有效定义：数 n 等于 5013 如果 F 真确，它等于 10 如果非 F 真确.

对直觉主义说来，析取式 A 或 B 是下列句子的一个不完全的传达，即 A 成立或 B 成立，或至少给出一个方法使我们可以从 A 与 B 选出一个是成立的. 合取式 A 与 B 意指 A 与 B 同时成立. 蕴涵式 A 蕴涵 B (或如果 A 则 B)，则表示可以根据直觉主义的推理由 A 推出 B，或更明显地说，我们有一种方法使得可以从对于 A 的每

一个证明而获得用以证明B的方法;否定式非A（或A是谬误的）意指可以根据直觉主义的推理从A推出矛盾B及非B来，或更明显地说，我们有一个方法使得可以从对A的任何证明而获得对于矛盾B及非B的证明来[1]（或获得一个已知为谬误的句子如$1=0$的证明）. 关于这些直觉主义意义的进一步讨论将见于§82[2].

海丁(Heyting)[1934]说,"根据布劳维,数学和我们思想中的精确部分是一致的. …,没有一种科学,特别是,没有一种哲学或逻辑可以作为数学的先决前提. 如果引用任何哲学原则或逻辑原则来作证明的工具,那将是一个循环,因为在表述这些原则时已经用到数学的概念了". 对于数学来说,"唯一来源在于直觉,直觉把概念及推理放在我们的眼前而显得非常直接明白",这个直觉"不过是一种能力，可以分别处理各种概念以及作出正规地出现于通常思维之中的那些推理". 经过分析,我们看到自然数列的观念是建基于下列的可能性之上的，首先它能够把一客体或经验作为和其余外界相分开的东西而考虑，其次它能够在这些客体彼此之间加以区别,第三,对第二过程想像它无限地重复着."在直觉主义数学中，我们的推理并不是依照固定的模式从而把这些模式集成逻辑,反之,每一次的推理都是直接地由它的显然性来验证".但仍然"有些一般规则,依照这些规则可以从一些数学的定理而用直觉地

---

1) 在这个定义中,要用到非B来解释非A,这看来是一个循环,可以用下法避免,两个自然数(或两个有穷符号序列)的相同与相异是两个基本概念（参见下一段). 对于具$m=n$形(而m,n为自然数)的语句B而言,非B将指m与n是相异的. 在这段对非A的解释中，A是指这种形状以外的任何语句，而B则指这种形状的语句. 等价地可以说,由于0与1的相异是直觉上给出的(因此非$1=0$是成立的);所以非A便指：人们获得一种方法，可以由对A的任何证明而获得对$1=0$的证明(参见本段后面的话)——根据作者(在六版第65页上的)注.

2) 郭尔莫哥洛夫发现了，可把构造性逻辑（直觉主义逻辑）解释为解决问题的逻辑. 在这解释中使用了直觉的"问题"这个概念，它可以由不同的方式加以精确化. 其一由克林（Kleene）所叙述(见§82). 他所考虑的问题是可实现作出的问题,另一方法最近由梅维捷夫（Ю.Т.Медведев）[1955] 所叙述. 他所考虑的每一个问题都是作出属于给定的函数类中算术函数(参见§10例2)的问题.与构造性的逻辑的解释问题有关的还有沙宁(Н. А. Шанин)[1953，1955]的研究,那是有关于构造性的真与构造性的假的特殊类型的概念的——俄译注

明显的方式推出新定理；关于这些相互关系的方式的理论可以在‘数理逻辑’内加以处理，这样，数理逻辑便是数学的一个分支而在数学以外它就没有合理的应用了”.

我们现在要问：在古典数学中非直觉主义的方法起了多大的作用?

非直觉主义方法出现于古典的初等数论中这事是值得注意的，因为这样一来初等数论便可以作为数学基础理论研究的一个最初的及最简单的试验地了，数学基础理论是由直觉主义及形式主义的思想而产生的.在本书中,我们便几乎完全限于初等数论.

实际上在现有的初等数论中，非直觉主义方法并不起大的作用. 大多数的非构造性的存在证明都可以换为构造性的证明.

另一方面，在解析学中(以及数学的更高等的部分)非直觉主义式的定义及证明却遍及于整个研究法. 在狄德金的分划表示中实数是有理数的无穷集(§9). 因此要把它们当作一般的客体我们便已经用到完备的无穷了.即使在最简单的定义中,我们已经对这些集使用了排中律. 例如,要证明对任意两个实数 **x** 与 **y** 言,或者 **x** < **y** 或者 **x** = **y** 或者 **x**>**y**, 我们便两次使用了排中律如下：或者 **y** 中有一有理数 r 不在 **x** 中，或者 **y** 中所有有理数均在 **x** 中；以及把 **x** 与 **y** 对调的类似语句. 又在上确界 **M** (§9(A)，§12)的非直谓定义中，我们对所有实数集的总体亦同法处理. 另一类非构造性推论的例子出现于§9(B)的证明中，因为这里我们假设有权利同时对于无穷多个 n 值而从集 $\mathbf{M}_n$ 中挑选 $\mathbf{a}_n$ 但不给出任何特性来决定所挑选的元素. (这是“选择公理”的一个例子,这公理首先被蔡梅罗[1)][1904]所注意而列为一假设. 在§4定理B的证明中我们亦用到这公理.)

虽则在量方面完备的无穷被禁止了(如高斯所说的)但在集方面它却完全无缺地重新出现了. 正如希尔伯特与伯尔奈斯《数学

---

1) 根据谢尔平斯基 (Sierpiński) [1928]，在1902年勒维 (B. Levi) 已经看到在许多集论的证明上尤其是在§4定理B的证明上有用到选择公理的必要性——俄译注.

基础》第一卷（[1934]）41 页上所描述的，“解析学…的算术化并非十全无缺的，因为引入了一系列基本概念，它们是不属于直觉的算术思维的范围内的．之所以使得我们认为解析学有一个严谨的基础，只在于：这寥寥几条基本假设已充分地使得量的理论作为整数集的理论建立起来了”．

下一个问题是：在直觉主义的限制下可以建立一种怎样的数学呢？如果现存的古典数学可以在直觉主义的限制下重新建立起来，不必增加太大的劳动也不必牺牲太大的已获得的结果，那么古典数学的基础问题可以说已经解决了．

直觉主义者已经创造一种完全新的数学，包括连续统理论及集论（参见海丁[1934]）．这数学应用了一些概念并作出一些区别都是在古典数学中所没有的；它本身亦非常动人，但作为古典数学的替代者来说，它却显得缺乏力量而且在许多方面其发展亦很烦难．例如，在布劳维的连续统理论中，我们不能断言任意两个实数 a 与 b 或者相等或者不等．我们关于 a 与 b 间的相等性或不等性的知识可以或详或略．$a \neq b$ 表示由 $a = b$ 而引出矛盾，而 $a \# b$ 则是更强的不等性，它表示可以指出一个隔开 a 与 b 的有理数的例子．当然由 $a \# b$ 可以推出 $a \neq b$．但是可以找出一对实数 a 与 b，使得我们不知道是否或者 $a = b$ 或者 $a \neq b$（或 $a \# b$）．显然由于这些复杂性使得连续统的古典理论被一些在形式上较不明晰的东西所代替了．

尽管这样，（如最近所采用的）用重新解释的另一种方式而直觉主义地重新建立古典数学的可能性还是有的（参见 §81）．

§14. 形 式 主 义

布劳维已经揭露了在发生的或构造的趋向之下其最终的结局是怎样的；希尔伯特则对公理的或存在的趋向（§8）作了同样的工作．公理方法已经由欧几里得的实质公理学而改进到希尔伯特《几何基础》（[1899]）的形式公理学了．形式主义是为着对付由悖

论所引起的危机以及由布劳维及外尔对古典数学所作的指责的. 这一步骤已由希尔伯特在[1904]中所筹划,而在1920年以后则由他及他的合作者伯尔奈斯、阿克曼、冯诺曼等所严肃地实行(参见伯尔奈斯[1935a],外尔[1944]).

希尔伯特承认古典数学中凡是涉及完备无穷的那些命题都是缺乏直觉的明显性的. 但他不愿象布劳维那样因此而放弃了古典数学.

为了要在直觉主义的批评面前挽救古典数学，他提出一个规划，这规划可初步地叙述如下: 古典数学将表述为一种形式公理理论,并证明这理论的无矛盾性.

在希尔伯特这个提议以前，对于公理理论的无矛盾性证明所用的方法，尤其是在希尔伯特早期的公理思考中，都是用给出'模型'法的.所谓一公理理论的模型简单地是指从其它理论所挑选出来的客体系统而满足这些公理的(§8).即是说,该公理理论中每个客体或原始概念都相应于另一理论中一客体或概念使得这些公理变成(或相应于)另一理论中的定理. 如果另一理论是无矛盾的那么该理论也一定是无矛盾的了. 因为设在该公理理论中可以由公理而推出一矛盾. 则在另一理论内就模型中的客体而作相应的推理,便必然可以由相应的定理而推出矛盾来了.

一个有名的古老例子是贝特兰米 (Beltrami) (1868) 指出,洛巴契夫斯基及波里埃的平面非欧几何中 (即平面双曲几何) 其直线可以用欧氏空间中具负常曲率的曲面上的短程线来表示[1]. 因此如果欧氏几何是无矛盾的那末平面双曲几何亦然. (克莱茵(Klein) (1871)用具有凯莱 (Cayley) 尺度(1859)的平面射影几何而给出另一模型; 这亦可看作欧氏平面中的一个模型. 参见杨

1) 著者这句及以后各句是不精确的. 所说的表示只能局部地存在，即只可能把洛氏平面内某个圆放在欧氏空间中具常负曲率的曲面上，而不是整个洛氏平面. 因此贝氏结果不足以给出作者所说的无矛盾性的断言. 但是克莱茵模型却可以达到这目的. 参见叶非莫夫 (Ееφимов) «高等几何学» 1945 (有中译本——译者注.)，V§6，§8 VII §3——俄译注.

(Young) [1911]讲义 II 及 III.)

笛卡儿 (Descartes) (1619) 的解析几何，即对几何客体的坐标表示，便是在解析学的基础上，即在实数论的基础上证明几何理论无矛盾性的一般方法.

利用模型方法而作的无矛盾性证明只是相对的. 只有当被抽出模型的那个理论是无矛盾时，模型所用以表示的理论才是无矛盾的.

只有当前一理论是无可非议时这模型才给我们以无矛盾性的一个绝对证明. 维伯伦与布赛 (Bussey) [1906] 曾经造一模型只用一个有限(!!)[1]的客体系来表示点，因而对于射影几何的初浅部分获得了一个无矛盾性的绝对证明. (参见杨 [1911] 讲义 IV 及 V.)

为了要绝对地证明古典数论、解析学及集论(适当地公理化后)的无矛盾性，模型方法是没有希望的. 根据数学材料而作出的模型都不过把我们引到别的一些理论去，而以前用模型的方法已经化归到这些理论来了.

至于不可能由感觉世界或物理世界而抽出模型，这在希尔伯特及伯尔奈斯 [1934]，pp. 15—17 已论证过了. 他们用芝诺 (Zeno) 的第一悖论(公元前五世纪)来说明. 根据这悖论，一个跑步者不能够在有限时间内跑完一路程. 因当他跑完这段路前必先跑完一半，又必先跑完 1/4，必先跑完 1/8 等等. 这便需要他完成无穷多个动作. 通常解决这个悖论的办法是指出跑完各段路程时所需要的时间间隔，它所组成的无穷级数是收敛的. "事实上对这悖论还有更激烈的解决办法. 我们并不必一定要相信数学对运动所作的时-空表示 (就非常小的空间与时间间隔言) 是具有物理上的意义的；反之，我们极有理由假设该数学模型只是由某些经验领域上的事实抽象而来，即由我们观察所能达到的那种运动抽象而成的，作为一个简单地形成观念的过程，它正如连续介质力学所抽

1) 原文为"(sic)"，该字为拉丁文，"原文如此"之意. 凡使用该字时，皆是叫读者特别注意该字，等于"注意这字! 不要漏过!"现在用双惊叹号表示之——译者注.

象的那样，后者假定了空间是连续地充满了物质的…，当人们相信能够由经验或感觉而直接得出一个[真实]无穷大时情况完全一样…，更精密的考查可以证明，实际上并没有给出一个无穷大，只不过在理智过程中添入或抽象出来罢了”.

因此，如果要想证明数论（包括其中非直觉主义部分）解析学等的无矛盾性，那末必得用别的方法了．希尔伯特的贡献便在于理解到一个新的直接办法，而且认出这方法和公理化的关系．这个直接方法可由无矛盾性的意义（至少我们今天的看法）而得出，这意义是，在这理论中不可能由公理而推出矛盾(即一命题 A 及其否定非 A 同时为定理)．因此要直接证明一理论的无矛盾性，我们便须证明一些关于该理论本身的命题，尤其是有关于该理论中各条定理的一切可能的证明．希望被证明其本身为无矛盾的那个数学理论，其本身便变成了另一个数学研究的对象，后者希尔伯特叫做“元数学”或“证明论”．这事如何可能，以及该研究的方法如何，我们将在下一节加以考查.

目前我们将进而讨论希尔伯特建议的内容．希尔伯特[1926，1928]在古典数学中区别出“真实”的与“理想”的陈述句，其要点如下，真实陈述句是具有直觉意义的；理想陈述句是没有直觉意义的．凡是把无穷作为真实无穷的那些陈述句都是理想的．古典数学除真实句子外还加入理想句子，为的是想在关于无穷集的推理中还能够使用亚里士多德逻辑的简单规则.

把‘理想元素’加入到一体系去来完成它的结构并使该体系的理论得以简单化，这是现代数学中常用的有收获的办法．例如，在欧氏平面几何中，两条不同的直线交于唯一的点，除却当它们平行时．为了除去这个例外，彭斯列 (Poncelet) 在他的射影几何(1822)中便在原来的每条直线上引入无穷远点，使得凡平行线都有共同的无穷远点而非平行线则有不同的无穷远点．这些无穷远点全体组成一无穷远直线．在射影平面上一线绕一有穷远点而旋转时，它的无穷远点便描成该一条无穷远直线．用这个办法便可以把点和线之间的结合关系简单化了．两个不同的点决定唯一的直线（它

在两点之"上"，即该直线通过该两点)；两条不同直线决定唯一的点(它在两线之上)．这两命题是彼此对偶的．对平面射影几何有一条普遍原则，叫做对偶原则，在该门科学中每一条定理，如果把"点"与"直线"互换所得的陈述句亦是一条定理[1)]．

为了某些理论的目的而把新元素加到已经预先造好的元素系统去，还可再举一个例子，这便是数系的继续扩大，例如由自然数出发，然后加入负整数，分数，无理数最后加入虚数．负整数的加入在于把加法理论简化，因为这时其逆运算(减法)常是可能了．

希尔伯特的问题大体上相似于虚数当初出现时所存在的问题．因为当时虚数还未曾被理解清楚，为了对怀疑者而证明虚数的用处人们可以建议证明下列的事情，如果依照指定的规则而应用虚数来推出一些只与实数有关的结果，那末该结果必然正确．当然，这种建基于实数之上的关于虚数的论证在今天说来是不必要的了，因为大家知道它们可以解释为平面上的点(威色尔 (Wessel) 1799) 或实数对 (高斯 1831)．

由于这点相似性我们要问，假定古典数学中兼含真实句及理想句的那一部分，其无矛盾性证明(在希尔伯特意义下)已经成功了，我们是否可以推论说，即使通过理想陈述句而证明的真实陈述句亦是直觉主义地真确的？我们能够推论到什么程度将在后面讨论(§42 末 §82 末)；它将视无矛盾性证明包含有什么而定，也将视所谓真实陈述句是指那一类而定．如果这是可以的话，那末，希尔伯特规划的成功，对直觉主义者说来古典数学便可以起证明手段的作用了．

当希尔伯特规划提出的初期，在布劳维与希尔伯特之间有一个非常激烈的争论．布劳维[1923]说，"不正确的理论即使还未碰到矛盾，但仍然是不正确的，正如一个罪恶的行为即使还未被法院所发觉，但仍然是罪恶的"．希尔伯特[1928]反驳说，"要想从数学家手中取走了排中律，这就类似于想夺去天文学家的望远镜或禁

1) 这时，公理亦算在定理之内——俄译注．

止拳击家使用拳头一样”[1].

根据布劳维([1928])与海丁([1931—2,1934]),在直觉主义者与形式主义者之间的和解是可能的,条件是(例如冯诺曼[1931—2])形式主义者不把非直觉主义的古典数学给以实质的意义或内容,由于这是以无矛盾性证明作论证的. 布劳维说,这样的一种论证“含有一种恶性循环,因为这个论证必须依靠下列命题的(内容上的)正确性,即由一句子的无矛盾性可以推出它的正确,即是说,依靠于排中律的(内容上的)正确性”,而这正是形式数学中需要论证的一部分.

对形式主义立场来说,难点就在于:既然已赞成直觉主义的说法,说非直觉主义的古典数学的定理是缺乏真实意义的因而不能说是真的,那又怎样说明非直觉主义的古典数学为什么是有意义的呢?

古典数学之构成一理论与直觉主义教学具有完全不同的意义. 希尔伯特[1928]说,“一般说来绝对不可能要求每个公式本身是可以孤独地解释的…”. 在理论物理中“只有一些物理定律的组合或推论才能够被实验所证实,——同样在我的证明论中,只有那些真实陈述句子才是能够直接检验的”.

古典数学中的任何一个理论可以看作是一个简单的及精彩的体系化模式,有好些(看来)真的真实陈述句,本来好像是乌合的无联系的甚至于预先不知道的,在这理论中便可以作为一些理想定理的后承了(参见冯诺曼[1947],爱因斯坦(Einstein)[1944],p. 288).

解析数论的例子可以说明由一些解析学的定理(缺乏直觉主义者所可接受的意义的)经常可以推出具有直觉主义的意义的数

---

1) 所引的一段话很难说是对布劳维所给出的原则上无情的批评而作的严正的抗议. 这样的抗议对希尔伯特说来可能是信服的,对布劳维则不然. 但在同一论文中希尔伯特给出另一个严正的理由,例如,不是排中律而是难容忍的无意义的概念形成法应对集论中悖论的出现负责. 又他的“公式游戏”可有助于“我们思考技术”的研究,参见希尔伯特《几何基础》1948,pp. 382—383——俄译注.

论定理，而对此或者还找不出非解析的证明，或者即使有也是非常复杂的．

在这意义之下，一个理论要有价值，必须其中所包含的真实陈述句是真的．对这点，以前数学家总认为可由定理（我们现在认为是理想句的那些定理）的真确性来保证．现在我们却希望靠无矛盾性的证明来保证．

略作为一个简单的推移，我们便可以得到更高层的理论化，它只间接地与原来那一层中的真实命题的系统化发生联系，而它主要的是与中间各层的理想命题的系统化发生联系．因此我们很想发问，在相继地作出更高层的理论结构中是否的确能增加原来那种的真实命题呢，是否的确对原有命题的证明有本质上的简化呢（参见 §42 末）．

对系统化某一种给定的真实真理来说，要用多么高层的理论结构才可以？这是可以争论的，例如，要用古典解析学来系统化数论的真理，其正确性可以得到辩解吗？从历史上来说，解析数论只是一个副产品，古典解析学的实际推动力在于科学，包括物理应用中的几何学．

希尔伯特与伯尔奈斯［1934］强调说，在科学中"我们要做的…主要在于下列那些理论，它们并不把事情的实际状态全部复制出来，而只是表示对事情状态作一个简化了的理想化（它们的意义也在于此）"(pp. 2—3)．解析学可用于"观念形成"，从而可用以表示上述那些理论，或者可用模型法而把那些理论化归于它．解析学的无矛盾性证明可以使我们保证了对这些理论中所作的理想化的无矛盾性(p. 19)．

外尔（［1926，1928，1931］）指出，在理论物理中，与实验相协调的并不是单个的陈述句而是整个理论体系．这里所取得的并非对所给的资料作真确的描述，而是对世界作一个理论的、纯粹符号的构造（他还说我们的理论兴趣并不限于，甚至于主要地并不在于'真实陈述句'，例如，这指针符合于刻度，而是在于理想的假设，例如假设电子是通用的电的量子）．远远超出直接实验的范围的世

界理论构造有什么‘真理’或客观性呢？ 这是一个很深的哲学问题．这问题与下列问题有密切关系：根据什么使我们选出某个公理系统作为基础呢？关于这点无矛盾性只是一个必要的论据而非充分的论据． 当只是就数学本身而立论时，他可能和布劳维一样只限于直觉真理；因为他找不到承认更多的东西的理由． 但当讨论世界的理论构造和物理学融结在一起时，他便站在希尔伯特的一边了．

要对形式主义观点作裁决，那就部分地将依靠于他们提出的规划的成果． 这个规划要求发展一个“元数学”，在其中特别地要建立古典数学的无矛盾性．

我们预先指出，元数学可以供给一个严格的数学技巧，用以探究关于数学和逻辑的一大堆基础问题，无矛盾性问题只是其中之一．例如，现在便已应用元数学的方法来讨论由于逻辑主义派、直觉主义派乃至希尔伯特派所引起的数学系统化的研究．(反之，元数学的产生也应归功于逻辑主义及直觉主义的研究．)本书的其余部分，并不在于得到一个裁决，用以支持或否认任何说法的形式主义的观点；我们的目的只在于看看元数学的方法究竟是什么，由于研究它而发现了一些什么东西．

§15. 一理论的形式体系化

我们现在便要开始一个规划，把数学理论本身来作为精确的数学研究的对象．在数学理论中，我们研究一些数学客体的体系．然则数学理论本身怎能够作为数学研究的客体呢？

数学活动的结果体现于一些命题中，即该数学理论的断定命题或定理． 我们不能够希望精确地研究存在于数学家心中的东西，但我们却能够考虑这些命题的系统．

这些命题的系统必须完全明显．这些命题是不能够全部都写出的，但我们必须对这理论的研究者说出所有的条件，由这些条件就可以决定什么命题是在这理论中成立的．

第一步，这理论中的命题必须演绎地排列，由其中一些命题可以逻辑地推出其它命题的，前者便可明指为公理(或公设).

只有当这理论中与定理推演有关的无定义名词或技术名词的一切主要的性质，都已经用公理表示出来了的时候，这个第一步才完结．这样便可以实行推演而把技术名词当作没有意义的字了．因为，如果说除却由管制技术名词的公理所能推出的性质以外，技术名词还有一些意义是推演定理时所必须的，这便等于说并不是所有技术名词的与推演有关的性质都已被公理表示出来了．当技术名词的意义可以舍去不计时，我们便达到形式公理学的观点了(§8).

这些技术名词还有其文法特性，它们或为名词，或为形容词动词等等．此外还有一些寻常名词或逻辑名词，它们的意义是在推演过程中使用的．的确，形式公理化到哪一点为止这是任意的，因为形式名词与寻常名词的区分并没有一个绝对的根据.

无论如何，就明显表出所有条件(它们决定什么命题在该理论中成立的)这点来说，我们仍没有达到目的．因为我们还没有明白指出在推演中所必须使用的逻辑原则．这些原则并不是每种理论都是一样的，这点我们现在已经很知道了(§13).

为了要把这些原则明显表示出，便需要对上一步骤补充以第二步，上一步骤是对所谓技术名词意义中非文法部分而做的．现在所有一切字的所有意义都舍弃不计了，它们在理论之中被使用时所须服从的一切条件都明显写出了．以前通过寻常名词的意义而暗中引进来的逻辑原则现在则一部分代以新的公理而另一部分代以规则，这些规则允许由一个句子或一些句子而推出另一句子．因为我们已经完全把内容或实质抽象掉了，只留下形式，因此我们说原来的理论已经形式体系化了．在这个结构中，该理论不再是一些有意义的命题的体系，而只是一些句子的体系，句子只是一些字的序列，字只是一些字母的序列．我们只靠形式而指出怎样的字的组合叫做句，那些句是公理，那些句子是其他句子的直接后承.

这样的形式体系化是否可能？一个理论能够形式体系化到怎样的程度？这只有在我们尝试作形式体系化而且研究其结果后才能知道(参见 §29，§42，§60，§72)。

数学理论至少可以作极大的形式体系化这一发现，是人类的长期理智历史的结晶．

依照古代希腊传说，数学中公理-推演方法是由毕达哥拉斯(公元前六世纪)发现，而由欧几里得(公元前 365?—275?) 流传下来的，他的"《几何原本》"据说是《圣经》以外流传最广的一书[1]．欧几里得并没有能够把在推演定理中所需要的一切公设都明显写出．这些公设在现代已经给以补充了，例如，关于点在直线上的次序的公设，是由帕舒 (Pasch) [1882] 提出的．

对逻辑的形式处理，即把句子的演绎推理只依其形式而描述，这是由亚里士多德(公元前 384—322) 发现的．现代对它也有所改进．

当我们对数学理论作形式体系化时我们使用这两个发现．要完全严格地做到这点，实践上还必须用特别的符号语言来重新构造所考察的理论，即把它符号化．我们并不对用自然的语言例如希腊语或英语等所写的理论施行上述两步骤，我们却特别地为这个理论而造一个新的符号语言．自然的语言按其结构说太繁杂了，太不规则了，而其用法也太含混了．(在符号语言中经常用符号代表一整个字而非代表字母；相应于句子的符号序列则叫做"公式"．)

这个新语言具有数学中符号体系的一般特征．在代数中我们的推演，例如，对方程式所作的形式处理，如果在寻常语言中来施行那将是过于烦难的，后者正是在韦达 (Vieta) (1591) 等人发明现代代数记法以前所用的．我们发现了简单的符号记法，使得这些符号可以依照形式规则而处理，这是现代数学能够强有力地前进的办法之一．但是，在寻常的数学实践中却只是部分符号化及

---

1) 作者未曾计及我国的四书、五经等著作——译者注．

部分形式化，因为叙述句中一部分仍然用字来表示，而推理中仍然有一部分是根据字的意思而不是根据形式规则的.

自从莱布尼兹([1666])提出他的通用文字的想法以后，在德莫干 (De Morgan) ([1847,1864]) 布尔 (Boole)([1847, 1854]), 皮尔斯 (Peirce) ([1867,1880]),施累朵(Schröder) ([1877,1890—1905])等人之下，形式逻辑借助于数学的技巧，亦作出了符号的处理.

这些研究的发展最后汇成为严格意义下数学一部分的形式体系化，如弗雷格([1893,1903])皮亚诺([1894—1908])及怀特黑与罗素 ([1910—13]) 等所作的(上面所描述的把一理论明显起来的方法通常叫做逻辑主义 (logistic) 方法).

希尔伯特的贡献有：第一，强调一理论的严格形式化，包括把意义完全舍象掉，其结果便称为一形式系统或形式体系[1] (有时叫做形式理论或形式数学)；第二，他把整个形式体系当作数学研究的对象，这种数学研究就叫元数学或证明论.

元数学包括形式体系的描述或定义，以及关于形式体系的性质的研究. 当处理一个特殊的形式体系时，这形式体系可叫做对象理论，而关于它的元数学可叫做它的元理论.

从元理论的观点看来，对象理论并不是通常我们所理解的那一种理论，而只是一个没有意义的客体的体系，正如下棋时棋子的位置那样，这些客体接受机械的处理正如棋子的移动一样. 对象理论是当作符号体系以及由符号所造成的客体的体系而被描述及研究. 符号只是简单地当作不同种类的可识别的客体[2]. 为确定起见，可把它们具体地当作纸上的标志，或更准确些，根据把符号看作纸上的标志这种经验作抽象而得的. (证明论必须有某种程度的抽象，因为它假设可以作出任意长的符号序列，虽然全世界上的纸及墨水都是有限的.)对于这系统内其它的客体则只依照它们

1) 原文为 *formalism*，在这里不能译为‘形式主义’，否则便和数理哲学上的一个流派相混了——译者注.

2) 即其中任何两个均可认出其相同或不同——俄译注.

由符号而组成的方式来分析[1]. 依照定义，作为元数学研究对象的形式体系它所应有的性质便尽于此了.

元理论是直觉的及非形式的数学之一种（除非该元理论本身又被元元理论所形式化，这点我们这里不予讨论）. 元理论将由寻常语言而表示，根据需要亦可引入数学符号，例如元数学的变元等等. 元理论的断言必须能够被理解. 其推演必须被确信. 它们（推演）必须依照直觉的推理而进行，而不是像形式理论中的推演那样，是根据一些用符号表示的规则而进行的. 为了把对象理论形式化我们必须用符号表示一些规则，但现在我们必须不依靠任何规则而去理解各个规则是如何起作用的. 对于定义形式数学来说，直觉数学甚至已是必需的了.

（这点理解为，对于元数学的推论的可信来说，最后必须靠意义以及显然性，而不是靠任何约定的规则. 当然在实际上，我们仍可以把元数学的结果形式化为一些定理或规则，而这便可以准形式地用以简化直觉的推理. 这是非形式的数学的一般过程. 有时我们甚至于引用形式地叙述的（直觉）逻辑的原则，只要从这些原则的形式推导可以指出一个方法，借这方法就可以非形式地进行推理.）

在元理论中所用的方法将只限于形式主义者所说的有穷性方法，它只承认使用直觉上可能的客体以及可行的过程.（德文finit，英文 finitary 均指有穷性，而德文 endlich，英文 finite 则指有穷多）任何无穷集都不能当作完备的整体. 有关存在的证明至少也要暗中给出一个方法用以构造出需要证明其存在的那个客体[2]（见§13).

对于希尔伯特引入元数学的目的来说，这个限制是必需的. 一

1）对此可参考马尔科夫（A. A. Марков）[1951]（第5节至第15节）或[1954]（第一章）——俄译注.

2）这种观点并不是唯一可能的. 元数学（证明论）亦可以当作一种有内容的数学科目（例如与代数或拓扑相似），其方法不必受任何特殊的限制（关于这点参见下面所论）——俄译注.

个给出的数学理论中的命题可能没有清楚的意义，因而在其中的推论可能没有毫无疑问的显然性．当把该理论形式化后，该理论的发展便化归为形式及规则了．这时关于该理论中的陈述句由什么组成，该理论中的证明是什么，便不再含混了．于是到底形式化于其中的方法会不会引起矛盾以及关于这些方法的效果等的问题便应在元理论中加以探讨了，而所用的方法自应和原来理论中的不同，不应再引起同样的怀疑．

有穷性方法便是在直觉主义的初等数论中所用的那种方法．有些形式主义者则企图把它们限制得更狭（希尔伯特与伯尔奈斯[1934]，p. 43 与伯尔奈斯[1935,1938]）．

关于这点，以后我们再讨论(§81)．为了反对直觉主义者而维护古典数学，无须限制得比直觉主义者所允许的更狭．但是只要它们已足够，自然可以根据严格的初等方法而进行．所有在 § 13 中所列出的直觉主义数论推理的例子，我们都当作是有穷性的．我们将发现，在我们的元数学的探究中，在很长的一个阶段内完全初等的直觉主义方法是足够的．一个方法是否被元数学所允许其最后的决定当然要看它的直觉的可信性．

（有些作者把“元”一字加到一语言或理论去，只要它们把别的语言或理论作为研究的对象，而不限于用有穷性方法．这时也常用“语法语言”一字以区别于“对象语言”．参见卡纳普[1934]；又参见 § 37．在本书内只当所用的方法是有穷性时我们才用“元”一字．）

在元数学中所研究的形式体系（一般地）是这样选择，使得它们既可以作为我们多多少少地已经熟悉的非形式数学及逻辑的模型，同时它们也是由这些非形式数学及逻辑作形式体系化而得的．当把一个给定的形式系统考虑为一个非形式理论的形式化时，对形式体系中的符号、公式等所想给的意义便叫做该形式系统（符号、公式等）的解释，换句话说，当把该系统考虑作该非形式理论的模型时须作一对应，而所谓符号或公式的解释便是指在该对应中非形式理论内的客体、命题等等．

如果一个公式表示古典数学中的理想陈述句(§14)那末其解释便不能有完全的直觉(或有穷性)的意义,而只能是在古典数学的非形式(或非严格形式化的)的发展中古典数学家所想的那种意义,这种发展便是历史上所发生的以及现在所发生的那一种,在其中各过程并没有有意识地照证明论的严格意义来形式化.

解释是促使元数学家去选择依定义引入的某个特殊的形式体系的原因. 解释可以引导他选择他所研究的有关该系统的问题. 甚至于还可以使他获得对这些问题的带有关键性的解决方法. 只是当对他的结果作最后陈述及证明时,他(作为一个元数学家)才禁止使用这解释.

这个禁止起了什么限制作用呢? 元数学必须把形式体系当作一些符号的体系而研究,这些符号又必须完全客观地处理. 这便是说,这些符号本身必须作为最终的客体,而不是用来表示别的什么不同于它们本身的东西. 元数学家看到的就是它们,而不是通过它们而看别的东西;因此它们是没有解释也没有意义的客体.

在研究这些客体时,元数学必须有自己的方法与工具. 只要是有穷性的便成. 例如,元数学可以在有穷性方式上使用自然数. 当一些公式具有(在元数学之外的)有穷性解释时,很可能在元数学之内来定义这些形式客体的某个性质,使等价于(在元数学之外看来)这些公式的解释. 因此有穷性的解释便又从后门引入来了. 但无论如何,元数学不能处理古典数学中的理想命题的任何非有穷性的解释[1].

为了要使得我们充分地明白,为什么我们对于所讨论的形式体系发生兴趣,以及它们如何地可以作为我们非形式地已经熟悉的数学及逻辑的某些部分的形式体系化,在本书中我们将指出可能的解释,并引用有暗示性的术语,例如把形式推演叫做"证明",把记号 & 叫做"与". 这对于我们所要达到的全部的目的是必需的,尽管该解释是超出元数学本身以外的.

让我们简要地重述一遍. 整个说来,有三个分开的及不同的

1) 参看上一个脚注——俄译注.

“理论”：(a)非形式的理论，由它形式化以后便得到一形式体系。(b)形式体系或对象理论，(c)元理论，形式体系便在其中被描述并研究。

这里(b)既是形式的，便不是一般意义之下的理论，而只是一些符号及由符号所组成的客体的体系(组成法由(c)规定)，但它却构成了(a)的一个约定的映象或模型，另一方面，(a)及(c)都是非形式的，都没有像(b)那样的精确地决定的结构。

因此(c)便是一个理论，以(b)为研究对象，它只研究(b)而不管(a)，或更确切地说，它不管用(a)所作的(b)的解释。

此外，(c)限定只用有穷性方法，一般说来，(a)却没有这种限制。

第二部分　数理逻辑

第四章　形式体系

§16. 形式符号

现在我们将引入一个特殊的形式体系．本章所述的形式体系将为其后四章及以后若干章的研究对象．这系统可以作为古典初等数论及其必需的逻辑的形式化．

在建立这系统时，我们参考了希尔伯特-阿克曼[1928]，希尔伯特-伯尔奈斯[1934,1939]，坚钦[1934-5]，伯尔奈斯[1936]等人的著作及一些间接材料．

我们的任务有两个不同的方面．第一，形式体系本身必须用有穷性方式来描述及探究，而无须用到该体系的解释．这便是元数学．其次，必须对该体系有一个解释，根据该解释，该体系便成为数论的形式化．

如果想强调第二个方面，可用下列方法．先分析现存的非形式的数学，选出并确定其基本概念，基本公设及推演关系，而这样最终便达到一个形式体系．

但这里我们却先要强调第一个方面．形式体系的整个结构立刻就引进来了，并进而作元数学的探究，只在很偶然的情况下，才注意到它的解释．我们要求读者注意形式体系是什么，它是如何被探究的，至于该特殊体系的解释及挑选它的理由便将随我们的往前阐述而逐渐清楚．

建立形式体系的第一步是列出形式符号．在结构上，形式符号表与通常语言的字母表相似，不过在解释之下，这些符号有许多是对应于一字或一句而非对应于单独的字母的．下面便是形式符

号表.

逻辑符号: ⊃(蕴涵), &(与), ∨(或), ¬(非), ∀(对所有的), ∃(至少有一). **谓词符号**: =(等于). **函数符号**: +(加), ·(乘), ′(后继者). **个体符号**: 0(零). **变元**: ***a***, ***b***, ***c***, ⋯. **括号**: (,).

括号中所附注的字可用作这些符号的读名，亦可用以初步地暗示其解释，例如，可把那些逻辑符号解释为'逻辑常项'. 变元解释为历经自然数而变的. 我们假设这些变元有一个无穷表列或无穷枚举(潜伏的，参见§ 13).

重说一遍，这些解释对形式体系的描述而言是毫不相干的.我们进行处理时必须把形式符号只当作一些标志而不当作通常的符号，即不当作用以暗指或表示某些东西的那种符号. 我们只假定，每当一些形式符号出现时可以认出哪些是相同的形式符号，哪些是不同的形式符号. 就变元情形而言，我们还须认出它们确是变元符号.

形式符号是第一种形式客体. 由这可以引出第二种客体，即由有限个(有限次出现的)形式符号而组成的序列，这将叫做形式表达式. 这里用"出现"一字是指(构成序列时的)项，并强调指出不同的项可以是同一的符号(这与我们以前对'序列'一语的用法是一致的，参见§ 1, § 2). 形式表达式包括那些只由一个(一次出现的)形式符号组成的表达式. 除非特别声明，不然空序列(没有项的)是不当作形式表达式的. 例如，0, (***a***) + (***b***), (***a***) = (0)及((0∀00 = 都是形式表达式. 最后一式含有七个(七次出现的)符号，即它有七项；其中第三、第五、第六(次出现的)符号都是一个0(的出现)；其中出现的不同符号是(, 0, ∀, =. 在结构上说，形式表达式类似于语言中的字；但在解释之下，它们有些却对应于整个句子，例如，(***a***) = (0)，有些则是没有意义的，例如((0∀00 =. 这里，不要因我们的用语而忘记了下列事实，即就形式体系本身而言，表达式并不表示什么，只是一些可认识的可区别的客体而已.

作为第三种形式客体，我们还用到有限个(有限次出现的)形

式表达式所组成的序列.

在讨论形式客体时，我们经常不直接表出它们而把它们用特地引入的字母来代表(即指定 denote)或用包含有已经这样地引入的字母的表达式来代表. 例如，字母"s"可代表形式表达式(**a**) + (**b**)，而"A"可用以代表 (**a**) = 0. 其余的例子下文即见.

这样地使用的字母或表达式可不是形式符号或形式表达式，而是非形式的或元数学的符号及表达式，它们是作为形式客体的名称的. 和通常符号体系的非形式使用法相比较，这里有一个新特点，即它们所命名的客体，本身仍是符号或由符号所组成的客体. 因此，我们要区别两类符号体系：形式符号体系，那是我们要谈论的，直觉的或元数学的符号体系，那是用来谈论别的符号的. 为了使事情直捷明瞭，我们就这两个不同的目的而用不同型的符号(前者用 **a**, **b**, **t**, **x**, **A**, **B** 等，后者用 a, b, t, x, A, B 等).

用符号及表达式来命名我们所谈论的客体，这点不应看作是新鲜的；我们日常构造一个句子来谈论一客体时便用到这方法了. 新奇点无宁在于，在元数学中所使用的是另一过程，即把客体本身也就是客体的样品直接放入句子中. 虽则这破坏了通常的文法规则，但当我们处理元数学时，这却不会引起混乱的. 因为在元数学中，我们必须把形式符号当作是无意义的，因此形式客体不能作为别的客体的名字，因此一句子如果含有形式客体的样品时，这句子只能是谈论该客体本身的.

这些说明对我们的元数学亦可以适用. 在一些偶然的段落中，有关于解释的并且已给读者标明有这种字样的，我们可以给形式符号以非形式的身份，把它们当作有意义的.

对形式表达式作元数学的研究时，我们将使用毗连运算，把两个或多个形式符号的序列相继地连结起来而作成一个新序列. 例如下两个形式表达式((0∀00 = 与(**a**) + (**b**)依次毗连便得一新的形式表达式 ((0∀00 = (**a**) + (**b**)； 而下列七个形式表达式 (，(**a**) + (**b**)，)，·，(，(**c**)′，) 依次毗连便得到一个新形式表达式 ((**a**) + (**b**))·((**c**)′).

如果一些需作毗连的形式表达式是被元数学的字母或表达式所代表，那么在写毗连的结果式时，这些字母或表达式就可用来代替它们所代表的那些形式表达式了．例如，如果字母"s"代表某形式表达式，则把下列七个形式表达式(，s，)，·，(，$(\boldsymbol{c})'$，)作毗连的结果便可写为"(s)·$((\boldsymbol{c})')$"．这里，"(s)·$((\boldsymbol{c})')$"是一个元数学表达式，它代表一个形式表达式，所代表的形式表达式当然视字母"s"代表什么形式表达式而定．在特例，如果 s 是$(\boldsymbol{a})+(\boldsymbol{b})$，则(s)·$((\boldsymbol{c})')$便是$((\boldsymbol{a})+(\boldsymbol{b}))\cdot((\boldsymbol{c})')$．

§17. 形 成 规 则

现在我们定义形式表达式的一些子类，我们所用的定义和文法中的语法规则相似．

首先我们定义'项'，它与文法中的名词相似．在本体系中，项都是代表自然数的，它们或固定或可变的．该定义的表述将借助于元数学变元"s"与"t"，以及上面所述的毗连运算．它具有归纳定义的形式，这使我们能够从项的一些已知例子而得到更多的例子．

1. 0是项．2. 变元是项． 3.—5. 如果 s 与 t 为项，则(s)+(t)，(s)·(t)与(s)′ 亦为项．6. 只有由 1—5 所给的才是项．

例 1 由 1 与 2，0，$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 为项． 所以由 5，(0)′ 与 $(\boldsymbol{c})'$ 为项，再由 5，((0)′)′为项；由 3，$((\boldsymbol{c})')+(\boldsymbol{a})$为项．

现在我们定义公式，它们类似于文法中的(陈述)句子．

1. 如果 s 与 t 为项，则(s)＝(t)为公式．2—5. 如果 A 与 B 为公式，则(A)⊃(B)，(A)&(B)，(A)∨(B)与¬(A)为公式．6—7. 如果 x 为变元而 A 为公式，则 ∀x(A) 及 ∃x(A) 为公式． 8. 只有由 1—7 所给的才是公式．

例 2 用 1 及已经得到的关于项的例子可知，$(\boldsymbol{a})=(\boldsymbol{b})$ 及 $(((\boldsymbol{c})')+(\boldsymbol{a}))=(\boldsymbol{b})$ 是公式．所以用 5 及7，$\neg((\boldsymbol{a})=(\boldsymbol{b}))$ 及 $\exists\boldsymbol{c}((((\boldsymbol{c})')+(\boldsymbol{a}))=(\boldsymbol{b}))$ 是公式．最后，应用 2，下列亦是公

式:

(A) $(\exists c((((c)')+(a))=(b)))\supset(\neg((a)=(b)))$.

由项及公式的归纳定义可得下面的推论，即每一项或每一公式都可以由 0 及变元出发，经过一系列的步骤而得，每个步骤都相应于这些定义中的直接句(§ 6)，这步骤叫做该句的应用.

除了应用项的定义中句 1 或 2 以外，其它的每一步骤都如下. 开首，我们给出一个或一对早已得出的表达式，我们把这个表达式或这对表达式的每一个都加上括号，并把下列十种形状的表达式之一引进来.

(B) $\supset$, &, $\vee$, $\neg$, $\forall$x, $\exists$x, $=$, $+$, $\cdot$, $'$,

这里 x 为变元. 这十种形状的表达式可以叫做运算子. 特别是，$\supset$, &, $\vee$, $\neg$ 叫做命题联结词，而呈 $\forall$x 或 $\exists$x 形的运算子叫做量词，$\forall$x 为全称量词，$\exists$x 为存在量词；这六个叫做逻辑运算子.

该表达式或该对表达式叫做在结果的表达式中该运算子的辖域. 在一项或一公式的整个结构过程的每一步骤中，都以一个显然的方式把一表达式或一对表达式的各部分与结果表达式各部分之间作了对应，因此如果我们追究这个过程，那末我们不但能够对整个项或整个公式最后引进的运算子指派了一个辖域，甚至于对该项或该公式中每个运算子都指派了一个辖域.

例 3 在公式 (A) 中，第一次出现的运算子 $=$ 的辖域是 $((c)')+(a)$ 及第一次出现的 b，而 $\exists c$ 的辖域是 $(((c)')+(a))+(b)$.

现在我们指出下列的事实，其严格的证明我们马上便讨论到. 在一项或一公式中，各运算子的辖域可以从括号的配置出发而唯一地确定. 换句话说，当把项或公式作为形式符号的有限序列而给出时，根据括号我们便能够重新发现，如何依照项及公式的归纳定义而构成它，该构成的一切重要细节都可以知道.

这事实的严格证明可由 § 7 例 2 的引理 2 再加入下列的引理而得，后者可由公式的归纳定义出发再作归纳证明而得.

引理 4 在一给定的项或公式中，对括号有一种正常配对（括

号共 $2n$ 个，n 个左括号，n 个右括号）使得每个运算子的辖域均如下出现.

(a)对以一个表达式为辖域的运算子言，该辖域直接括在配对的括号之内，而运算子则直接在这对括号的外面，即直接在左括号的左面（对 $\neg$，$\forall x$，$\exists x$ 而言）或直接在右括号的右面（对 $'$ 而言）.

(b)对以两个表达式为辖域的运算子言（即对 $\supset$，&，$\vee$，$=$，$+$，$\cdot$ 言），每个表达式都直接地括在配对的括号之内，而运算子直接地写在括出左表达式那一对括号中的右括号的后面，又在括出右表达式的那一对括号中的左括号的前面.

例 3 （续完） 详细写出的公式(A)有 22 个括号. 依引理 4，这 22 个括号必容许一个正常的配对，在按照项与公式的定义而构作公式的过程中必可发现它，并且它将指出各运算子的辖域. 既知它有一个正常的配对，依引理 2 这配对是唯一的，因而便可以依 § 7 的算法而发现，无须预先知道如何按照项与公式的定义来构作这公式. 在 § 7 之末我们的确这样做了，在那里我们便把这 22 个括号作了检查，并没有看括号内的符号. 把整个公式 (A) 中出现的 22 个括号的配对找出后，我们便可以看见第一次出现的 $=$，其辖域便是由括号 $\left(^{3}_{4}\ \right)^{10}_{4}$ 所括的表达式以及由括号 $\left(^{11}_{5}\ \right)^{12}_{5}$ 所括的表达式. 这和我们上文所决定的辖域相符. 同样，$\exists c$ 的辖域是由括号 $\left(^{2}_{6}\ \right)^{13}_{6}$ 所括的表达式.

要证明辖域可根据括号的配置而找到，这是无需用到 § 7 的引理 3 的，但要讨论一项或一公式的全体（或部分）中各辖域时，该引理却是很有用的. 例如，如果 M，N，A 为公式，而 A 只是(M)$\supset$(N)中的（连续的）一部分而非全体时，那末我们便可推论说，这部分（或每个这样的部分）或为M的一部分或为N的一部分.

在给出项与公式的定义时，我们使用括号，为的是可以无含混地指出辖域. 但显然，若照这定义做去，常常引入过多的括号，超过了该目的所严格必需的. 因此，虽然作出了上述的定义，我们却约定，在写出项或公式时，或写出代表它们的元数学表达式时，我们省去过多的括号作为一种缩写.

如果我们引用代数学中习见的约定，如“$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$”理解为$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}$，那末这种缩写还可以进一步．我们说$+$的秩在$\cdot$之前，并依照我们在上文(B)处所列的次序而定各运算子的秩．在缩写一项或一公式时所省去的括号，如果要复原起来，我们可以一步一步地逐次选择一个在表(B)中出现在前的运算子，即有最高秩的运算子，对它给一个最大的辖域，以结果仍成一项或一公式为准．

我们并不经常依照上述约定而尽可能地省去括号，我们却注意到最方便于阅读这点．（为此，我们有时也把圆括号改为方括号或花括号．）

例 4 要把“$A\supset B\vee C\&D$”的括号复原，我们依次地得“$A\supset(B\vee C\&D)$”，“$A\supset((B\vee C)\&D)$”，“$(A)\supset(((B)\vee(C))\&(D))$”．我们可把另行写出的公式(A)缩写为:

(A′) $$\exists\boldsymbol{c}(\boldsymbol{c}'+\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b})\supset\neg\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}.$$

另一种缩写在于引入一个新符号，并指出如何把包含有这新符号的任一表达式翻译为一个不包含它的表达式的方法．例如，我们把项$(0)'$，$((0)')'$，$(((0)')')'$，$\cdots$等分别缩写为“1”，“2”，“3”，$\cdots$等，又把公式$\neg\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$缩写为“$\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{b}$”．把公式$\exists\boldsymbol{c}(\boldsymbol{c}'+\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b})$缩写为“$\boldsymbol{a}<\boldsymbol{b}$”．因此另行写出的公式(A)可以写为

(A″) $$\boldsymbol{a}<\boldsymbol{b}\supset\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{b}.$$

关于缩写“$\neq$”的一般规则可以容许我们把$\neg s=t$缩写为“$s\neq t$”，只要s与t为项便成．缩写“$<$”的一般规则可以容许我们把$\exists x(x'+s=t)$缩写为“$s<t$”，只要x为变元而s与t为不含x的项便成．如果引入缩写时是省去变元的，例如“$<$”的情形，则在复原时究竟须补入什么变元便会带来随意性．例如，在把“$s<t$”复原时，我们可以把x写成s与t所不含的任何变元．这种随意性是无关重要的，因为不管我们选择什么样的容许变元，对缩写公式所想作的叙述永远是成立的．

我们将把这一切缩写看作只是对元数学所作的说明（而不在元数学之内——译者注）．这样做对于我们的目的是合适的．因

为这样一来，创立形式体系的那些基本定义在理论上更加简明了．因此，关于体系中的项和公式的元数学的陈述须理解为指的是依照定义而写的未缩写的表达式，尽管在写出该陈述句时我们使用了各种缩写．

§18. 自由变元与约束变元

在一公式 A 中，一变元 x 的某个出现叫做约束出现（或作为约束变元而出现），如果它出现于量词 ∀x 或 ∃x 中，或出现于（具同样 x）量词 ∀x 或 ∃x 的辖域之中；否则它叫做自由出现（或作为自由变元而出现）．

例 1 在 $\exists \boldsymbol{c}(\boldsymbol{c}' + \boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}) \supset \neg \boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$ 中，$\boldsymbol{a}$ 的两次出现，$\boldsymbol{b}$ 的两次出现都是自由的，而 $\boldsymbol{c}$ 的两次出现都是约束的．在 $\exists \boldsymbol{c}(\boldsymbol{c}' + \boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}) \supset \neg \boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}$ 中，$\boldsymbol{c}$ 的前两次出现是约束的，而第三次出现是自由的．在 $\exists \boldsymbol{c}(\exists \boldsymbol{c}(\boldsymbol{c}' + \boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}) \supset \neg \boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c})$ 中，$\boldsymbol{c}$ 的各次出现都是约束的．

在上面的定义中，如果把“公式 A”改读为“项 t”，我们便得到一项 t 中一变元 x 的任何一次出现是自由的（或约束的——译者注）的定义．一变元的出现之为自由或约束，经常和当时它的出现所在的项或公式有关．

例 2 在 $\exists \boldsymbol{c}(\exists \boldsymbol{c}(\boldsymbol{c}' + \boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}) \supset \neg \boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c})$ 中，$\boldsymbol{c}$ 的第三次出现，如果当作在 $\boldsymbol{c}$ 本身之中或在 $\boldsymbol{c}'$ 之中或在 $\boldsymbol{c}' + \boldsymbol{a}$ 之中或在 $\boldsymbol{c}' + \boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$ 之中，那末它便是自由的，如果当作在 $\exists \boldsymbol{c}(\boldsymbol{c}' + \boldsymbol{a} = \boldsymbol{b})$ 之中或在 $\exists \boldsymbol{c}(\boldsymbol{c}' + \boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}) \supset \neg \boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}$ 之中或当作在整个式子之中，那末它便是约束的．

一变元 x 如果是作为自由变元而在 A 中出现（简称自由出现），那末 x 便叫做 A 的自由变元，而 A 叫做把 x 当作自由变元而包含着（简称含 x 自由或含自由 x）；约束变元准此．

例 3 在 $\exists \boldsymbol{c}(\boldsymbol{c}' + \boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}) \supset \neg \boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}$ 中，$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 是自由变元，唯一的约束变元是 $\boldsymbol{c}$．

在公式 A 中变元 x 的某次约束出现是被下列一个量词所约束着的，即被管辖它的，且具最小的辖域的量词 ∀x 或 ∃x（同样的 x）所约束着的（简单地说便是，管辖它的且在最内部的量词），或者当它本身便在量词 ∀x 或 ∃x 中出现时，那末它就被该量词所约束着了（或说后者约束它）.

例 4 在 $\exists c(\exists c(c' + a = b) \supset \neg a = b + c)$ 中，c 的第一次及第四次出现被第一个量词 ∃c 所约束，而 c 的第二次及第三次出现被第二个量词 ∃c 所约束.

当依照项与公式的定义而作出一公式时，如果一量词的引入第一次把一变元的出现从自由的变成约束的，那末结果公式中该变元的这次约束出现便被该量词所约束（或者，如果该变元在量词中，便被它所在的量词所约束）.

例 5 将例 4 与例 2 作比较.

关于自由与约束变元（有时叫做'真实'及'貌似'变元）的解释，现在可以作出一些初步附注. 这些附注当然不是元数学的一部分，但它们却可以帮助我们去掌握元数学的一些区别. 含有自由变元的表达式，是代表一个依赖于该变元的值的量或命题. 含有约束变元的表达式，是代表了在该变元的变域上作了一个运算的结果. 我们的约束变元与逻辑的量词运算有关，但数学家可以遇到其它种类的他们所熟知的运算的例子. 在下面，n 与 y 是自由的而 i 与 x 是约束的:

(A) $$\sum_{i=1}^{n} a_i, \quad \lim_{x \to 0} f(x, y), \quad \int_{-y}^{y} f(x, y)dx.$$

在下面，t 作为积分上限的出现是自由的，而在被积式中的出现是约束的:

(B) $$\int_0^t f(t)\,dt.$$

为了作更进一步的解释，我们可以指出，在非形式数学中，这两类变元的使用方式有刻划性的差异. 约束变元是一种迂迴说法，用以表示在变元变域上作了运算的结果，因此我们可以把变元

改为任何其它的具同样变域的变元而不致于更改意义（须作适当的注意）. 例如,

$$\text{(C)} \qquad \sum_{j=1}^{n} a_j, \quad \lim_{z\to 0} f(z,y), \quad \int_{-y}^{y} f(t,y)\,dt$$

（通常）便和上文（A）中相应的表达式同意义（但一般说来，$\lim\limits_{y\to 0} f(y,y)$ 与 $\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)$ 不同）. 在某一表达式中，如果我们把自由变元代以一个代表常客体或变客体的表达式,我们（通常）便得到一个有意义的结果,但如对约束变元这样作,其结果便没有意义了. 例如(对(A)作代入)

$$\text{(D)} \qquad \sum_{i=1}^{5} a_i, \quad \lim_{x\to 0} f(x,2), \quad \int_{-x}^{x} f(x,z)\,dz$$

(通常)是有意义的表达式,但

$$\text{(E)} \qquad \sum_{5=1}^{n} a_5, \quad \lim_{2\to 0} f(2,y), \quad \int_{-x}^{x} f(0,z)\,d0$$

则否. 如果同一变元在一表达式中既自由出现又约束出现，那么该表达式所代表的量便只与该变元的自由出现的值有关. 例如，积分(B)是 t 的函数,当 $t=3$ 时其值为

$$\text{(F)} \qquad \int_0^3 f(t)\,dt \qquad \text{而非} \quad \int_0^3 f(3)\,d3.$$

代入. 在叙述下一节的元数学定义时我们要用到代入运算，它可如下定义. 所谓在一项或一公式 A 中(处处)把变元 x 代以项 t 是指在 A 中把 x 的每个自由出现都同时地换为 t 的出现. 试用毗连记法来描述它,设 n 为 x 在 A 中自由出现的次数（$n \geqslant 0$）; 试把这些出现写出，则 A 可写为“$A_0xA_1x\cdots A_{n-1}xA_n$”($A_0$, A_1, $\cdots$, A_{n-1},A_n 是不含有 x 的自由出现——对整个 A 而言——的部分，可能是空部分,而写出的全部 x 的 n 次出现都是自由的). 那末在 A 中把 x 代以 t 的结果便是 $A_0tA_1t\cdots A_{n-1}tA_n$.

要表示代入的结果最好用一个简洁的元数学记法. 如果要对 x 作代入,我们首先引入一个复合记号例如“A(x)”来代表被代入

式[1]，表示它与 x 有关，正和数学中的函数记法那样（§ 10）．于是在 A(x) 中把 x 代以 t 的结果便写为"A(t)"．

例 6 设 x 为 c 而

A(x)或 A(c)为 $\exists c(c'+a=b)\supset\neg a=b+c.$

则 A(0)为 $\exists c(c'+a=b)\supset\neg a=b+0,$

而 A(a)为 $\exists c(c'+a=b)\supset\neg a=b+a.$

例 7 设 x 为 a，而 A(x) 为 $a+c=a$．则 A(0)为 $0+c=0$，而 A(b) 为 $b+c=b$．

用以得到 A(t) 的代入必须永远是在原来的公式 A(x) 中对原来的变元 x 而作，即对第一次引入记号"A(x)"时那个公式及那个变元而作．

例 7 （续完）对上文的 x 及 A(x) 言，A(c) 是 $c+c=c$．如果我们在 A(c) 中把 c 代以 b，我们得 $b+b=b$．但这和 A(b) 不同，因正确地说来，后者该是在 A(a) 中把 a 代以 b 而得，即原来的 A(x) 中把 x 代以 b 而得．（在非形式数学中由于误用函数的记号亦会有同样的困难．）

我们并不要求在 A(x) 中 x 真的作为一个自由变元而出现．当 x 不是 A(x) 的自由变元时，代入的结果 A(t) 便是原来的表达式 A(x) 本身．

同样地，我们可定义对若干个不同的变元所作的同时代入；我们亦用同样的记号，例如"$A(x_1,\cdots,x_n)$"表被代入式，而"$A(t_1,\cdots,t_n)$"表代入的结果．

今后，当我们注意到 A 依赖于变元 x 或依赖于变元 $x_1,\cdots,x_n$ 时，不管作代入与否，我们都经常引入复合记号如"A(x)"或"$A(x_1,\cdots,x_n)$"等而不用"A"．例如，当表示 ∀xA(x)（读为："对

---

1) 即在其中实施代入的式子． 本书中关于'被代入式'一语的使用和希尔伯特-伯尔奈斯[1939]附录 I 中所使用的不同，在那里考虑有公式变元的代入（参见下文 § 37 p. 193），而被代入式则指被放到公式的变元处去的那一表达式——俄译注．（本书所使用的"被代入式"可译"大代入式"，而希尔伯特-伯尔奈斯书上的'被代入式'可译为"小代入式"，因在本书中该两名并不同时使用，故今暂不作这个区别——译者注．）

所有 x, A(x)”）或 $\exists x A(x)$（读为：“至少有一 x 使 A(x)”）时，我们对该公式后半经常不写“A”而写“A(x)”. 我们再重复一遍，当用“A(x)”（或“$A(x_1, \cdots, x_n)$”）时我们并不意指着 x（或 $x_1, \cdots, x_n$ 的每一个）都必须自由出现于该公式中.

前面关于解释方面的初步附注告诉我们，为什么这个元数学代入运算必须是只对变元的自由出现而施行的.

如果 A(x) 中 x 的任何自由出现都不出现于量词 $\forall y$ 或 $\exists y$ 的辖域之内，这里 y 为项 t 的任一自由变元(即 y 自由出现于 t 中)，那末我们便说，对公式 A(x) 中变元 x 的自由出现处而言，项 t 是自由的(或对 A(x) 中 x 的代入位置处 t 是自由的或简言之对 A(x) 的 x 言 t 是自由的).

例 8 在下列第一个公式中 $\boldsymbol{a}$ 的出现处，项 $\boldsymbol{d}, \boldsymbol{d}+0'$ 与 $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{d}$ 是自由的，但在第二个公式中 $\boldsymbol{a}$ 的出现处则否：

(I) $\exists \boldsymbol{c}(\boldsymbol{c}'+\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}) \& \neg \boldsymbol{d}=0, \quad \exists \boldsymbol{d}(\boldsymbol{d}'+\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}) \& \neg \boldsymbol{d}=0.$

根据这个定义，当且仅当对 A(x) 中的 x 言 t 是自由的，那末在 A(x) 中把 x 代以 t 时，才不致于因把 t 引入 A(x) 中而使得 t 中的(自由)变元 y 变成了结果 A(t) 中 y 的一个约束出现了.

例 8（续完） 在(I)中把 $\boldsymbol{a}$ 代以 $\boldsymbol{d}+0'$，分别得出

(II) $$\exists \boldsymbol{c}(\boldsymbol{c}'+(\boldsymbol{d}+0')=\boldsymbol{b}) \& \neg \boldsymbol{d}=0,$$
$$\exists \boldsymbol{d}(\boldsymbol{d}'+(\boldsymbol{d}+0')=\boldsymbol{b}) \& \neg \boldsymbol{d}=0.$$

就第一式言，因代入而引进的 $\boldsymbol{d}+0'$ 式子中的 $\boldsymbol{d}$ 的出现，在全式中仍然是自由的，但就第二式而言则否.

当对于 A(x) 中的 x 言 t 是自由的，我们便说在 A(x) 中把 x 代以 t 的代入是自由的. 只由上面的一些粗浅的解释已经很显然地看出，当所作的代入不是自由时，它将是不适当的.

(I) 中的两公式意义是相同的；但(II) 中的两公式则否.

当作一个非形式的例子可取(A) 或(C)中的第二个表达式.这是 y 的一个函数，设为

(G) $$f(y)=\lim_{x \to 0} f(x, y)=\lim_{z \to 0} f(z, y).$$

当 $y=z$ 时，$f(y)$ 的值正确地应该如下得到

(H) $f(z)=\lim_{x\to 0}f(x,z)$ 而非 $f(z)=\lim_{z\to 0}f(z,z)$.

例 9 为要说明如何处理本节所说的用语及记号，试设 x 为(即"x"指(denote))一变元，而 A(x) 为(即"A(x)"指)一公式，b 为(即"b"指)下面的变元，即(i) b 对 A(x) 的 x 言是自由的，(ii) b 不自由出现于 A(x) 中(除非 b 为 x). 依照我们的代入记号，因"x"与"A(x)"先行引入，故(iii)A(b)为(根据定义)把 A(x) 中(自由出现的) x 代以 b 的结果. 由(i), 这次代入所引进的 b 在 A(b) 中的出现是自由的. 由(ii)在 A(b) 中 b 不再有其它的自由出现. 因此 A(b) 中 b 的自由出现便恰巧是代入时所引入的出现. 因此((i)—(iii)之逆): (iv)对 A(b) 中的 b 言 x 是自由的，(v)在 A(b) 中 x 不自由出现(除非 x 为 b), (vi) 把 A(b) 中(自由出现的) b 代以 x 后结果(事实上)为 A(x). 试举个特殊例子，

x, A(x), b, A(b)

可以分别为

$$\boldsymbol{c},\ \exists\boldsymbol{c}(\boldsymbol{c}'+\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b})\supset\neg\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c},$$
$$\boldsymbol{d},\ \exists\boldsymbol{d}(\boldsymbol{c}'+\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b})\supset\neg\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{d}.$$

§19. 变 形 规 则

在本节内我们将引进一些新的元数学概念 (叫做推演规则或变形规则)，它们使得该形式体系具有演绎理论的结构. 为了强调它与非形式的演绎理论的类似性，我们将从'公设'表开始；但是对元数学而言，这些并不是作为假定的公设，的确，绝不如此，因为正式说来，它们没有任何意义而只是一些公式及形式 (或模式) 以便我们今后作定义时引用罢了.

在给出公设表以前，让我们先看在表上所出现的各种公设的类型. 最简单的类型的'公理'，$\neg\boldsymbol{a}'=0$ 便是一个例子. 这是形式体系中的一个公式. 其次便是'公理形式'或'公理模式'，"B⊃A∨B" 便是一例子. 这是一个元数学的表达式，每当我们对由元数学字母"A"及"B"所代表的公式加以明指 (specify) 时，我们便得

到一个特殊的公理．例如，当A为 $\alpha'=0$ 而B为 $\neg\alpha'=0$ 时，我们便得公理 $\neg\alpha'=0\supset\alpha'=0\vee\neg\alpha'=0$．因此，公理模式是一个元数学方法，用以明指无穷多个具有同样形式的公理．

我们还必须有别种公设，它把由公理而推演定理这种运算加以形式化．这些便是'推论规则'，下面便是一个例子：

$$\frac{A,\ A\supset B}{B}$$

这是一个模式，具有三个元数学表达式"A"，"A⊃B"及"B"，每当对元数学字母"A""B"所代表的公式加以明指时，它们都表示一些公式．这规则的意义是，在横线之下的表达式所表示的公式可以由横线之上两表达式所代表的两个公式所'推出'．例如，如果把公式 $\neg\alpha'=0$ 当作A，而把公式 $\alpha'=0\vee\neg\alpha'=0$ 当作B，则这规则便容许由 $\neg\alpha'=0$ 及 $\neg\alpha'=0\supset\alpha'=0\vee\neg\alpha'=0$ 而推出 $\alpha'=0\vee\neg\alpha'=0$．因为 $\neg\alpha'=0$ 及 $\neg\alpha'=0\supset\alpha'=0\vee\neg\alpha'=0$ 是公理(如上所已知的)故 $\alpha'=0\vee\neg\alpha'=0$ 便是一个'形式定理'．(我们的用语是把公理包括在定理之内的．)

现在我们便详细列出公设的全表，然后给出一些定义，以根据这表而建立该形式体系的演绎结构．读者可以核验，由这一系列的定义的结果将可定义出公式类中的一个子类，它叫做'可证公式'类或'形式定理'类．

形式体系的公设

登场人物　在公设1—8中，A, B, C为公式．在公设9—13，x为变元而A(x)为公式，C是不含x自由的公式，t为一项，它对A(x)中的x言是自由的[1]．

群 A.　　谓词演算的公设

群 A1.　　命题演算的公设

1a.　$A\supset(B\supset A)$.

1b.　$(A\supset B)\supset((A\supset(B\supset C))\supset(A\supset C))$.

2.　$\dfrac{A,\ A\supset B}{B}$.

1) 公设9及12中的变元x叫做该规则的应用变元（原书用这名词而未作出正式定义）——译者注．

3. $A\supset(B\supset A\&B)$.

4a. $A\&B\supset A$.

4b. $A\&B\supset B$.

5a. $A\supset A\vee B$.

5b. $B\supset A\vee B$.

6. $(A\supset C)\supset((B\supset C)\supset(A\vee B\supset C))$.

7. $(A\supset B)\supset((A\supset\neg B)\supset\neg A)$.

8°. $\neg\neg A\supset A$.

群 A2. 谓词演算的(补充)公设.

9. $\dfrac{C\supset A(x)}{C\supset\forall xA(x)}$.

10. $\forall xA(x)\supset A(t)$.

11. $A(t)\supset\exists xA(x)$.

12. $\dfrac{A(x)\supset C}{\exists xA(x)\supset C}$.

群 B. 数论的(补充)公设.

13. $A(0)\&\forall x(A(x)\supset A(x'))\supset A(x)$.

14. $\boldsymbol{a}'=\boldsymbol{b}'\supset\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$.

15. $\neg\boldsymbol{a}'=0$.

16. $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}\supset(\boldsymbol{a}=\boldsymbol{c}\supset\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c})$.

17. $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}\supset\boldsymbol{a}'=\boldsymbol{b}'$.

18. $\boldsymbol{a}+0=\boldsymbol{a}$.

19. $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}'=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})'$.

20. $\boldsymbol{a}\cdot 0=0$.

21. $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}'=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$.

(公设 8 标有“°”号的理由见 § 23.)

我们可以核验,14—21 是公式;又对 A, B, C 或 x, A(x), C, t 的每一个选择言,只要服从在公设表前面所列出的约定条件,则 1—13 亦都是一些公式(对 2, 9, 12 的情形言,则指在横线上诸表达式及在横线下的表达式都是公式).

‘公理’可如下定义.一个公式如果具有 1a, 1b, 3—8, 10, 11, 13 的形状之一者或者如果它是公式 14—21 之一者,它便是公理.

‘直接后承’关系可如下定义.一个公式叫做另一个或两个公式的直接后承.如果它的形状如 2,9 或 12 中横线之下所表示的,而另一个或两个公式的形状则如横线之上所表示的.

这是相应于公设 2, 9, 12 的基本元数学定义,但我们还要增加一些术语来重述它,并特别注意这定义的应用过程.公设 2, 9, 12 叫做推论规则.对 A, B 或 x, A(x) 及 C 的任何(固定的)选择,

只要服从约定条件，则横线之上的公式叫做应用该规则时（或依该规则而作（形式）推演时）的前提（分别叫做第一、第二前提），而横线之下的公式叫做该应用时的结论．结论是前提的（根据该规则的）直接后承．

卡普纳[1934]把两类公设叫做一个共通名称，‘变形规则’，公理则看作是从没有前提而作变形的结果．

‘（形式）可证公式’或‘（形式）定理’的定义现在可归纳地如下给出．

1．如果D是一公理，则D是可证的．2．如果E是可证的，而D是E的直接后承，则D是可证的．3．如果E与F是可证的，而D是E与F的直接后承，则D是可证的．4．只有由1—3所给出的公式才是可证的．

这观念亦可利用中介概念‘（形式）证明’而得出．（形式）证明是指一个或多个（一次或多次出现的）公式所组成的有限序列，该序列中每个公式或者是一公理或者是该序列中前面的公式的直接后承．一证明可以说是它的最后一个公式的证明，而这最后公式便可说是（形式）可证的或是一个（形式）定理．

例1 下列17个公式所组成的序列是公式$a=a$的证明．公式1是公理16．公式2是一公理，根据公理模式1a而得，其中的A及B均是$0=0$；公式3亦根据公理模式1a而得，但其中的A是$a=b\supset(a=c\supset b=c)$，B是$0=0\supset(0=0\supset 0=0)$．公式4是公式1及3的直接后承，这时应用规则2，这规则中的A是$a=b\supset(a=b\supset b=c)$，而B是$[0=0\supset(0=0\supset 0=0)]\supset[a=b\supset(a=c\supset b=c)]$，而把公式1及3分别作为第一及第二前提．公式5是公式4的直接后承，应用规则9，其中x是c，A(x)是$a=b\supset(a=c\supset b=c)$，而C是$0=0\supset(0=0\supset 0=0)$（注意，它不含x自由）．公式9是一个公理，根据公理模式10而得，其中x是a，A(x)是$\forall b\forall c[a=b\supset(a=c\supset b=c)]$，而t是项$a+0$（注意，它对A(x)中的x言是自由的）．根据我们的代入记法（§18），A(t)便是把A(x)中x（的自由出现）代以t的结果，即

A(t)便是 $\forall b \forall c[a+0=b \supset (a+0=c \supset b=c)]$[1].

1. $a=b \supset (a=c \supset b=c)$——公理 16.
2. $0=0 \supset (0=0 \supset 0=0)$——公理模式 1a.
3. $\{a=b \supset (a=c \supset b=c)\} \supset \{[0=0 \supset (0=0 \supset 0=0)] \supset [a=b \supset (a=c \supset b=c)]\}$——公理模式 1a.
4. $[0=0 \supset (0=0 \supset 0=0)] \supset [a=b \supset (a=c \supset b=c)]$——规则 2, 1, 3.
5. $[0=0 \supset (0=0 \supset 0=0)] \supset \forall c[a=b \supset (a=c \supset b=c)]$——规则 9, 4.
6. $[0=0 \supset (0=0 \supset 0=0)] \supset \forall b \forall c[a=b \supset (a=c \supset b=c)]$——规则 9, 5.
7. $[0=0 \supset (0=0 \supset 0=0)] \supset \forall a \forall b \forall c[a=b \supset (a=c \supset b=c)]$——规则 9, 6.
8. $\forall a \forall b \forall c[a=b \supset (a=c \supset b=c)]$——规则 2, 2, 7.
9. $\forall a \forall b \forall c[a=b \supset (a=c \supset b=c)] \supset \forall b \forall c[a+0=b \supset (a+0=c \supset b=c)]$——公理模式 10.
10. $\forall b \forall c[a+0=b \supset (a+0=c \supset b=c)]$——规则 2, 8, 9.
11. $\forall b \forall c[a+0=b \supset (a+0=c \supset b=c)] \supset \forall c[a+0=a \supset (a+0=c \supset a=c)]$——公理模式 10.
12. $\forall c[a+0=a \supset (a+0=c \supset a=c)]$——规则 2, 10, 11.
13. $\forall c[a+0=a \supset (a+0=c \supset a=c)] \supset [a+0=a \supset (a+0=a \supset a=a)]$——公理模式 10.
14. $a+0=a \supset (a+0=a \supset a=a)$——规则 2, 12, 13.
15. $a+0=a$——公理 18.
16. $a+0=a \supset a=a$——规则 2, 15, 14.
17. $a=a$——规则 2, 15, 16.

例 2 设A为任一公式. 下列五个公式的序列便是公式$A \supset A$

1) 因对形式变元没有代入规则，必须先从公理 16 (即公式 1)变成公式 8 才能代入而得公式 14，通常读者以为由公理 16 作代入马上便得公式 14，那是暗中使用对形式变元的代入规则了——译者注.

的证明.（换句话说，我们下面所作出的实际上是'证明模式'，而其最后的表达式"A⊃A"便是'定理模式'，当把元数学字母A代以任何特殊的公式例如 0=0 时，它便变成一个特殊的证明了.）公式1是一公理，根据公理模式1a而得，其中的A与B便是本例中的A. 公式2是一公理，根据公理模式1b而得，其中的A与C便是本例中的A，其中的B便是本例中的 A⊃A. 公式3是公式1与2的直接后承，应用规则2而得，规则中的A便是本例的A⊃(A⊃A)，规则中的B便是本例中的 [A⊃((A⊃A)⊃A)] ⊃ [A⊃A]，公式1与2分别作为第一与第二前提.

1. A⊃(A⊃A)——公理模式1a.

2. {A⊃(A⊃A)}⊃{[A⊃((A⊃A)⊃A)]⊃[A⊃A]}——公理模式1b.

(1) 3. [A⊃((A⊃A)⊃A)]⊃[A⊃A]——规则2，1，2.

4. A⊃((A⊃A)⊃A)——公理模式1a.

5. A⊃A——规则2，4，3.

对形式体系中所定义的术语：证明、定理等(即形式证明，形式定理等)必须与它们的通常的非形式意义严格分开，后者我们是对元数学而使用的. 形式定理是一公式(即有限个符号所组成的某种序列)，而它的形式证明是由有限个公式所组成的某种序列. 元数学的定理则是有关于形式客体的一个有意义的陈述句，而它的证明是对这陈述句的真确性的直觉的证明.

我们已经说过三种形式客体(§16)，在研究它们时，我们可以随意地引入别种客体，只要作有穷性的处理便成. 此外，如果我们转而讨论元数学的定义及定理的形式，我们的讨论对象还可有不同的推广. 如果我们想同样规规矩矩的来讨论它们，那便需要一个元元数学. 但是这种讨论[1]在非形式数学(的其它部门)中是常见的；因此我们将把这种讨论看作是偶然的说明，有时用以帮助迅速看出到底元数学中做了一些什么事情，有时用以使得元数学定理的陈述可以简化一些，其实不如此还是照样可以陈述的.

---

1) 指对元数学的非形式讨论(有别于上面提到的"规规矩矩的讨论")——译者注.

第五章 形式推演

§20. 形式推演

即使是很初等的定理,其形式证明亦是很长的.的确,为了把逻辑推演分解为简单的步骤,我们必须付出使用更多步骤这个代价.

把一理论加以形式化，目的在于对该理论中的证明得到一个明显定义. 得到了这个定义以后便无须常常都直接引用定义了. 如果有一些元数学定理证明了某些形式证明的存在，那末在证明一公式的形式可证性时,使用这些元数学的定理,可以大大减少所花费的劳力. 如果这些定理的证明是有穷性的，这是元数学定理应该具有的，那末由这些定理的证明至少暗中供给了如何获得相应的形式证明的方法[1]，因此元数学定理的使用，可使形式证明的叙述大大缩短了.

这种元数学的定理中,简单一些的叫做导出规则,因为它们是可以由公设规则而导出的原则，把它们作为补充的推论方法并没有增加可证公式类. 我们将利用导出规则，使得建立形式可证性时所用的方法，和被形式化的理论中所用的非形式方法尽可能的接近.

---

1) 这一句话会使读者产生一种印象,以为关于形式证明存在的定理,如果使用非有穷性方法而证明,将不能够给出获得所找的形式证明的方法. 但事实并非如此(当他容许定理证明可用非有穷性方式时;如果他不容许这种方式那更没有问题). 事实上,假设已经证明了(用什么方式证明无关重要)关于公式E的形式证明是存在的这条定理了. 今把所有可能的形式表达式的有穷序列依确定的顺序而排列起来. 作出每种这样的序列后,如果它们不是任一公式的证明,或即使是证明但不是公式E的证明,我们都除掉. 如果我们承认关于公式E的形式证明是存在的这条定理是证明了,那末我们亦应承认,在依次作出所有可能的形式表达式(的出现)的有穷序列的过程中,我们必然会达到一个有穷序列,它是公式E的形式证明的——俄译注.

在建立形式体系时，我们对证明给以最简单的可能的结构，它只是若干公式的一个序列. 我们的导出规则中有些叫做‘直接规则’的，可用以对这个序列中一整段加以简缩；我们可以说，把这整段当作在构成证明时一个预先造好的组件.

但在数学的实践上，证明却经常有更复杂的结构，它使用了‘辅助推演’，即在推演时使用一些为着论证起见而作的假设，后来又把这假设解除. 例如，在反证法中，我们使用了‘辅助推演’；又当我们把待证定理的假设和已证命题同等看待用以推出待证定理的结论时，也使用了(虽则不那么明显)‘辅助推演’. 导出规则中叫做‘辅助推演规则’的便对我们给出这种过程来.

现在我们用元数学的定义而引入‘在假定下的形式可推演性(亦省称可推性——译者)’的概念. 设有一个公式(的出现的)序列 $D_1, D_2, \cdots, D_l (l \geqslant 0)$，由有限个公式一次或多次(的出现)所组成的序列将叫做由假定公式 $D_1, \cdots, D_l$ 而作的推演，如果在这序列中每个公式或者是公式 $D_1, \cdots, D_l$ 之一，或者是一公理，或者是序列中前面的公式的直接后承. 一推演亦叫做它的最后公式 E 的推演；而这最后公式便叫做可由这些假定公式而推演出的(记为，$D_1, \cdots, D_l \vdash E$)，也叫做这推演的结论(或尾公式).(符号$\vdash$可读为“推出”yield.)

推演及可推演性的定义是证明及可证性的定义的推广(证明及可证性是推演及可推性在 $l = 0$ 时的特例)，它允许我们随意地使用任何公式 $D_1, \cdots, D_l$，叫做这推演的假定公式，它们暂时和公理是被同样看待的.

例 1 设 A,B,C 为公式. 则下面五个公式所组成的序列便是由三个假定公式 $A \supset (B \supset C)$, B, A 开始而作的关于 C 的推演.(这是一‘推演模式’.)

1. B——第二假定公式.

2. A——第三假定公式.

(2) 3. $A \supset (B \supset C)$——第一假定公式.

4. $B \supset C$——规则 2, 2, 3.

5. C——规则 2, 1, 4.

例 2 读者试作出：(3) 由 A 及 B 到 A&B 的推演；(4) 由 A&B⊃C, A, B 到 C 的推演.

关于一推演或一证明 $A_1, A_2, \cdots, A_k$ 的分析是指，对每个 $j(j=1,\cdots,k)$，或者指出 A_j 是一个假定公式，而且是 $D_1,\cdots,D_l$ 中那一个，或者指出 A_j 是一个公理而且根据公设表中那一个公理模式或者是公设表中那一个特殊公理，或者指出 A_j 是前面公式的直接后承并且根据那条推论规则，而前面那一些公式是第一、第二前提. 简单一句话，一推演的分析是指一些说明，用以对其中出现的每一公式指出根据的(即，在我们的例中，便是公式右端所写的说明).

有时在推演(证明)中，一个公式的出现可以有多种方式的根据，例如，在(2)中的 A, B, C 有时可以使得(2)中的五个公式之一为一公理. 因此，在下面的讨论中，只当推演右面同时附有一个特殊的分析时，该推演过程才可以唯一地确定.

还须强调指出，表达式"$D_1,\cdots,D_l\vdash E$"是用来简单地指出 E 可由 $D_1,\cdots,D_l$ 而推演出的，它并不是该形式体系中的一个公式，它只是一个简单的方式，用以写出关于 $D_1,\cdots,D_l$, E 这些公式的元数学陈述，说存在某一种公式的有穷序列. 当 $l=0$ 时，这记号变成"$\vdash E$"，它指 E 是可证的. 记号"$\vdash$"首先由弗雷格[1879]引用；但现在的用法则创始于罗歇 (Rosser) [1935*] 及克林 [1934*].

例 3 下述两陈述句(1′)及(2′)已由于作出上面的推演(1)及(2)而得到验证了. 至于(3′)(4′)则由例 2 而得到验证.

(1′) $\vdash A\supset A$.　　(2′) $A\supset(B\supset C)$, B, $A\vdash C$.

(3′) A, $B\vdash A\&B$.　　(4′) $A\&B\supset C$, A, $B\vdash C$.

注意，在文中的符号"$\vdash$"是在 0 个或多个公式的有穷序列之后而在一个公式之前 (或者不是公式而是代表公式的元数学字母或元数学表达式). 这便使得在元数学的句子中，符号"$\vdash$"的辖域可以毫不含混. 特别是，形式运算子必然限于该系统的公式之内，

而“$\vdash$”则是一个元数学动词，超出该系统任何公式之外.

‘由 $D_1, \cdots, D_l$ 可推演出’这概念亦可无须用到推演这个中介概念而加以定义(参见 §19 中‘可证性’的第一个定义). 读者可自己陈述出这定义所必需的五个句子. 简单地说，“$D_1, \cdots, D_l \vdash E$”是指由(0 个或多个)公式 $D_1, \cdots, D_l$ 及(0 个或多个)公理按照推论规则可以得到公式 E. 当我们把由 $D_1, \cdots, D_l$ 及公理而得 E 时所考虑到的公式按考虑的先后而写下，我们便得到由 $D_1, \cdots, D_l$ 到 E 的一个推演，因此这两个说法的定义是一致的.

当我们想指出一些假定公式的集而不想逐个地说出这些公式时，我们用希腊大写字母例如“Γ”“Δ”“Θ”等来表示由 0 个或多个(出现的)公式所组成的有限序列(有时，当我们想强调其中出现的一些变元时，我们写成“$\Gamma(x)$”“$\Delta(x_1, \cdots, x_n)$”等等).

根据可推演性关系$\vdash$的定义，我们可以得到$\vdash$的一般特性，与形式体系的公设表中所列出的公设无关. (i)当 E 在 Γ 中时，$\Gamma \vdash E$. (ii)如果 $\Gamma \vdash E$，则对任何Δ有: $\Delta, \Gamma \vdash E$. 特别是，我们可以把任何可证公式作为可由任何假定公式而推演出的. (iii) 如果把 Γ 中的公式更动次序后得 Δ，或把 Γ 中重复的公式删去后得 Δ，则当 $\Gamma \vdash E$ 时有 $\Delta \vdash E$. (iv) 如果在 Γ 中把可证的公式删去或把能由其它假定公式推演出的公式删去后得 Δ，则当 $\Gamma \vdash E$ 时有 $\Delta \vdash E$. 因为，如果已给一个由 Γ 到 E 的推演，则在这个推演中，每当出现有被我们删去的那个假定公式时，我们便用由其它假定公式到这个公式的推演来替换，这样我们便可以得到一个由Δ到 E 的推演了. 这四个一般特性可以分解为下列引理中的更简单的性质. (尽管我们根据$\vdash$的一般特性而作的一切推理实际上全可根据(i)—(iv)或(I)—(V)而作出)，但是读者尽可以更大胆地根据$\vdash$本身的意义而灵活地进行推理.

引理 5 (I) $E \vdash E$. (II) 如果 $\Gamma \vdash E$ 则 $C, \Gamma \vdash E$. (III) 如果 $C, C, \Gamma \vdash E$ 则 $C, \Gamma \vdash E$. (IV) 如果 $\Delta, D, C, \Gamma \vdash E$ 则 $\Delta, C, D, \Gamma \vdash E$. (V)如果 $\Delta \vdash C$ 及 $C, \Gamma \vdash E$ 则 $\Delta, \Gamma \vdash E$. (根据坚钦[1934—5].)

例 4 如果 $A\vdash B$，又 $A, B, C\vdash D$ 及 $B, D\vdash E$，则 $A, C\vdash E$. 读者可直接根据$\vdash$的意义(它的两个说法的定义)而得，又可核验它可由(i)—(iv)或(I)—(V)而得.

我们对$\vdash$所作的定义是就上述公设表所决定那个特殊形式体系而说的. 特别地，它与该表中公理部分以及推论规则部分均有关. 直到现在，我们只讨论一个形式体系，但对其它的形式体系我们亦在类似的意义下使用$\vdash$，例如在公设表中只保留一部分公理及推论规则时所得的子体系便是. 我们永远把$\vdash$理解为就当时所研究的形式体系而言的.

注意，对于已给体系来说，如把其 Γ 中的公式加入到某一形式体系的公理集中去，得出另一体系，则前一体系中的 $\Delta, \Gamma\vdash E$，便与后一体系中的 $\Delta\vdash E$ 相等价.

§21. 推 演 定 理

我们将首先就命题演算，即只用群 A1 的公设的，而考虑下列定理.

定理 1 对命题演算言，如果 $\Gamma, A\vdash B$，则 $\Gamma\vdash A\supset B$（推演定理).

证明 本定理的假设是说，有一个有限公式序列使得，序列中每个公式(a)或是 Γ 中的公式之一，(b)或是公式 A，(c)或是一个公理，(d)或是由前面两公式根据规则 2 而作的直接后承(因为这里只有规则 2 是推论规则)；并且序列中最后的公式是公式 B. 这个序列我们叫做由 Γ，A 到 B 的“已给推演”.

本定理的结论说，有一个有限公式序列使得：这序列中每个公式 (a) 或是 Γ 中的公式之一，(c) 或是一公理，(d) 或是由前面两公式根据规则 2 而作的直接后承；并且序列中最后公式是公式 $A\supset B$. 这个序列我们叫做由 Γ 到 $A\supset B$ 的“结果推演”.

这定理将就已给推演的长度[1] k 使用串值归纳证法 (§7) 来证

1) 长度意指组成推演的公式序列的项数——译者注.

明，在归纳中，定理中的B作为变的，而Γ与A则作为固定的.

归纳命题P(k)或P(Γ, A, k)是：对每一个公式B，如果有一个长度为k的由Γ, A到B的推演，则可以找出一个由Γ到A$\supset$B的推演.

奠基(就$k=1$而证明本命题，即证明P(Γ,A,1))．设已给一公式B，又给出一个长度为1的由Γ, A到B的推演．我们分三种情况，看这个推演的最后一个(因$k=1$，故亦是唯一的一个)公式B是属于(a)—(c)中那一个而定．情况(d)是没有的，因为B是唯一的公式.

对每种情况我们都指出如何造出"结果推演"的方法，读者可核验，我们所作出的公式序列具有所求的性质.

情形(a)：B是Γ中公式之一．那末下面的公式序列便是结果推演.

1. B——Γ中公式之一.

2. B$\supset$(A$\supset$B)——公理模式1a.

3. A$\supset$B——规则2，1，2.

情形(b)：B是A．结果推演便是§19例2中的公式序列(1)，即A$\supset$A的证明．因为B为A，所以公式A$\supset$A便是A$\supset$B.

情形(c)：B是一公理．结果推演与情形(a)中的一样，不过第一步骤现在就以B是一公理来作根据了.

归纳推步．假设(作为归纳假设)对每个$l\leqslant k$都有P(Γ, A, l)；即，对每个$l\leqslant k$及每个B，如果给出一个长度l的由Γ, A到B的推演，那末都可以找出一个由Γ到A$\supset$B的推演．现在(为了证明P(Γ, A, $k+1$))假设给出一公式B以及给出一个长度为$k+1$的由Γ, A到B的推演．我们分四种情况，根据该推演中最后公式B是在(a)—(d)中那一种情形而定．对情形(a)—(c)的处理和奠基处相同.

情形(d)：B是由前面两公式根据规则2而得的直接后承．根据规则2的陈述，我们可把这两公式叫做P及P$\supset$B.（我们不照规则的原来陈述用A而改用P，为的是A已经用来作为该推演中

最后一个假定公式.）如果我们在该推演中舍去公式P以后的部分，则其余部分便是由Γ，A到P的推演，而其长度$l \leqslant k$. 根据归纳假设(以P作为B)，我们能够由之而得一个由Γ到 A⊃P 的推演. 同样对该推演中公式P⊃B及以前的部分而施用归纳假设，我们可得一个由Γ到A⊃(P⊃B)的推演. 我们利用这两个推演（设其长度分别为p及q)而造出结果推演如下.

	······	由Γ到A⊃P的推演，根据归纳假设而得的.
p.	A⊃P	
	······	由Γ到 A⊃(P⊃B) 的推演，根据归纳假设而得的.
$p+q$.	A⊃(P⊃B)	

$p+q+1$. (A⊃P)⊃((A⊃(P⊃B))⊃(A⊃B))——公理模式 1b.

$p+q+2$. (A⊃(P⊃B))⊃(A⊃B)——规则 2，p，$p+q+1$.

$p+q+3$. A⊃B——规则 2，$p+q$，$p+q+2$.

根据数学归纳法本定理便得到完全证明了. 本定理包括Γ为空集的特例，即对命题演算言，如果A⊢B则⊢A⊃B.

例 如上文的(2′)，我们有 A⊃(B⊃C)，B，A⊢C. 故由定理1可得 A⊃(B⊃C)，B⊢A⊃C.

为了更详细的检查这个例，我们试把得出(2′)时所根据的推演(2)作为已给的由 A⊃(B⊃C)，B，A到C的推演. 应用定理1的证明，我们应该能够找出一个结果推演，由 A⊃(B⊃C)，B到A⊃C. 因为已给的推演的长度>1，而其最后公式是由前面两公式应用规则2而得的，故本例符合归纳推步中的情形(d). 从那里我们找到一些细节及一些提示来补入新公式，即须对(2)中的部分推演1及1—4使用定理1. 继续这个办法我们最后便得到下面的结果推演.

1. B——第二假定公式.
2. B⊃(A⊃B)——公理模式 1a.
3. A⊃B——规则 2，1，2.
4. A⊃(A⊃A)——公理模式 1a.

5. $\{A\supset(A\supset A)\}\supset\{[A\supset((A\supset A)\supset A)]\supset[A\supset A]\}$——公理模式1b.

6. $[A\supset((A\supset A)\supset A)]\supset[A\supset A]$——规则 2，4，5.

7. $A\supset((A\supset A)\supset A)$——公理模式 1a.

8. $A\supset A$——规则 2，7，6.

(5) 9. $A\supset(B\supset C)$——第一假定公式.

10. $\{A\supset(B\supset C)\}\supset\{A\supset(A\supset(B\supset C))\}$——公理模式 1a.

11. $A\supset(A\supset(B\supset C))$——规则 2，9，10.

12. $\{A\supset A\}\supset\{[A\supset(A\supset(B\supset C))]\supset[A\supset(B\supset C)]\}$——公理模式 1b.

13. $[A\supset(A\supset(B\supset C))]\supset[A\supset(B\supset C)]$——规则 2，8，12.

14. $A\supset(B\supset C)$——规则 2，11，13.

15. $(A\supset B)\supset((A\supset(B\supset C))\supset(A\supset C))$——公理模式 1b.

16. $(A\supset(B\supset C))\supset(A\supset C)$——规则 2，3，15.

17. $A\supset C$——规则 2，14，16.

由 $A\supset(B\supset C)$，B 到 $A\supset C$ 的推演并不限于(5)这一个．事实上，有更短的推演，只须在(5)中删去公式 4—8 及 10—14，又为了在第 17 步骤中引用规则 2 以推演，就以 9(不以 14)作为第一前提便成了.

但当应用定理 1 的证明方法而取 (2) 作为已给推演时，我们却得出(5)这个特殊的推演．我们所以把找出 (5) 的方法完全写出，因为我们想强调，在定理 1 的证明中所用的推理的确是具有有穷性的，特别是想指出当使用数学归纳法时牵涉到一些什么东西．今后我们只要知道结果推演是存在的，是可以找出的也就够了.

定理 1 的证明可以作某种类元数学证明的模型．将来当读者能够把其论证写成明显的归纳证明时，我们将经常用简缩的办法写出这样的证明．但有些证明仍完全明显地写出以作为模型.

定理 1 的证明可以如下缩写．在所给的由 Γ，A 到 B 的推演

中，在每个公式之前却加上 A⊃.（在本例中，由推演(2)中的公式 1，2，3，4，5 我们便得推演(5)中的公式 3，8，11，14，17.）结果所得的公式序列(以 A⊃B 作为尾公式)并非(一般说来)由 Γ 而作的推演，但若照证明中就各情形加入所说的若干个公式，它便变成由 Γ 而作的推演了.（在下文 §22 处，当把本定理推广至于谓词演算时，这个简单的证明计划将略有修改.）

由 A⊃(B⊃C)，B├—A⊃C 再次应用定理 1 我们可得 A⊃(B⊃C)├—B⊃(A⊃C). 这些推论可安排如下.

1. A⊃(B⊃C)，B，A├—C——(2)

(5′) 2. A⊃(B⊃C)，B├—A⊃C——定理 1，1.

3. A⊃(B⊃C)├—B⊃(A⊃C)——定理 1，2.

在这个叙述中，我们得出一表达式的序列，很像形式证明中或形式推演中那些公式序列那样，但它们却是属于高一层的. 本序列中的表达式是关于形式体系的元数学的陈述，而在形式证明或形式推演中，它们却是形式体系中的公式.

再举一些推演及一些元数学陈述的例子如下.

1. A&B——第二假定公式.

2. A&B⊃A——公理模式 4a.

3. A——规则 2，1，2.

(6) 4. A⊃(B⊃C)——第一假定公式.

5. B⊃C——规则 2，3，4.

6. A&B⊃B——公理模式 4b.

7. B——规则 2，1，6.

8. C——规则 2，7，5.

(6′) 1. A⊃(B⊃C)，A&B├—C——(6)

2. A⊃(B⊃C)├—A&B⊃C——定理 1，1.

读者可证明下列两例.

(7′) A&B⊃C├—A⊃(B⊃C)——参考§20(4′).

(8′) 1. A⊃B，B⊃C├—A⊃C.

2. A⊃B├—(B⊃C)⊃(A⊃C)——定理 1，1.

§ 22. 推演定理(续完)

定理 1 是辅助推演型的导出规则(参考 § 20). 应用这个规则时,已给的由 Γ, A 到 B 的推演叫做辅助推演; 而根据定理的证明中所指示的方法由这个已给的推演而找出的由 Γ 到 A⊃B 的推演便叫做结果推演. 当我们说某个推演存在而不想实际上作出它时,我们可以用一个略语,例如说"推演 Γ, A⊢—B",意指"Γ, A⊢—B"这一陈述句所肯定其存在的那个推演.

在定理 1 中,辅助推演 Γ, A⊢—B 中最后的假定公式为 A, 但结果推演 Γ⊢—A⊃B 中,其假定公式表内却没有 A 了; 因此我们说,辅助推演中这个假定公式 A(即 A 的这个出现)被解除了. (在 Γ 中可能仍有 A 的出现,它却不被解除.)

一般说来,辅助推演规则是一个元数学定理,它具有一个或多个形如 Δ_i⊢—E_i 的前提,叫做辅助推演, 又具有一个形为 Δ⊢—E 的结论叫做结果推演. 在每个辅助推演中可有一个或多个假定公式被解除.

例 1 下一节中将建立的规则"如果 Γ, A⊢—C 及 Γ, B⊢—C, 则 Γ,A∨B⊢—C"中,有两个辅助推演, Γ, A⊢—C 及 Γ, B⊢—C, 在第一个辅助推演中,最后假定公式 A 被解除, 在第二个中, B 被解除.

简单地具有形式 Δ⊢—E 的元数学定理是直接型的导出规则. 它说,由 Δ 中的公式及公理可以由于使用推论规则而直接得到 E.

这两类的导出规则间,有下列的重要的差异. 当形式体系由于增加新公理或新推论规则而扩张时,直接规则必然继续真确,因为这种规则只不过说某种推演可以作出,而新公设的增加,不过增加构成这个推演的一些补充工具罢了. 但当新公设加入时, 辅助推演规则未必继续有效, 因为体系的扩张亦可使辅助推演增加新情况, 而对应于这些新的辅助推演是否存在结果推演, 却大成问题. 我们所陈述的辅助推演规则,大多数(特别是,所有本章中的规则)

都是在符号“⊢”之前全都有一个未明指的假定公式集 Γ 的，因此新公理的增加不会引起别的困难，但是新推论规则的增加却会在该规则的证明中引起新情况的讨论．

现在，我们按如下的条件来处理定理 1：或者全部群 A 的公设有效，或者甚至连群 B 的公设(其中只有一个公理模式和一些公理)也有效．为了处理证明中所出现的新情况，我们需要一些限制．

因为定理 1 中就命题演算而作的证明还未忘却，现在便来处理应是更容易的；但有些读者可能愿意把本章以后部分，除却 § 23 中涉及命题演算的以外，推迟到第六章以后去读．

我们先述一些定义，它们对于表述该限制是有用的．设已给由假定公式 $D_1, D_2, \cdots, D_l$ 而作的推演 $A_1, A_2, \cdots, A_k$ 和该推演的一个特定的分析(§20)，推演中一个公式 A_i (的出现)是否‘依赖’于假定公式 $D_1, \cdots, D_l$ 中的 D_j，我们可定义如下．

1．如果在所作的分析中 A_i 是 D_j，则 A_i 依赖于 D_j．2．如果 A_{i_1} 依赖于 D_j，而在所作的分析中 A_i 是 A_{i_1} (或 A_{i_1} 与别的 A_{i_2} 的)直接后承，则 A_i 依赖于 D_j．3 只有 1 及 2 才给出 A_i 依赖于 D_j．

容易看见，A_i 之依赖于 D_j 当且仅当推演中不存在任何子序列(不必定是连续子序列)，它在所给的分析下，构成了由其余的假定公式 $D_1, \cdots, D_{j-1}, D_{j+1}, \cdots, D_l$ 到 A_i 的推演．

例 2 在推演(6)中，公式 4，5 与 8 依赖于第一假定公式 $A \supset (B \supset C)$，其余的公式则否．公式 1，6，7(在所给分析下)造成了由其余的假定公式 A&B 到 7 的推演．

我们说，就一假定公式 D_j 言，变元 y 在所给的推演中(在所给的分析下)是变化的，如果(A) y 在 D_j 中自由出现，(B) 在推演中对依赖于D_j 的公式(作为规则 9 或 12 的前提)而就 y 应用了规则 9 或规则 12 (即把 y 作为规则中的应用变元 x)．否则，我们说就假定公式 D_j 言，y 在推演中是保持固定的．

例 3 设 x 为变元，A(x)为一公式，而 b 为一变元使得 (i)b 对 A(x)中的 x 言是自由的，(ii)b 在 A(x)中不自由出现(除非 b 为 x)；

设 C 为不含自由 b 的公式．那末下面的公式序列便是由 $C\supset A(b)$ 到 $C\supset\forall xA(x)$ 的推演．在核验满足公设 9 及 10 的约定条件时，我们用 § 18 例 9 中的事实 (iv)—(vi)．

1. $\forall bA(b)\supset A(x)$——公理模式 10(注意(iv)及(vi))．
2. $\forall bA(b)\supset\forall xA(x)$——规则 9，1(注意，由(v)，x 在 $\forall bA(b)$ 中不是自由的)．
3. $C\supset A(b)$——假定公式．
4. $C\supset\forall bA(b)$——规则 9，3．
6. $C\supset(\forall bA(b)\supset\forall xA(x))$——由 2，正如 §21 定理 1 中的情形(a)那样．
9. $C\supset\forall xA(x)$——由 4，6，正如定理 1 情形(d)那样．

如果 A(x)含有自由 x，则在这推演中 b 是变化的，因为(依(i)(iii))假定公式 $C\supset A(b)$ 含有自由 b，而在第 4 步中却就前提 3 的 b 而应用规则 9，3 又是依赖于假定公式的．但当 b 和 x 不同时[1]，x 却是保持固定的，因为在第二步中对前提 1 就 x 而应用规则 9 时，前提 1 并不依赖于假定公式．

在一给定的推演(及给定的分析)中，如果一给定的变元 y 不自由出现于一假定公式中，则它对这假定公式便必是保持固定的，但如果它自由出现于若干假定公式中，那末它可对其中一些公式是变化的，而对另外一些公式是保持固定的．

因为群 A 的公设中，只有两个即规则 9 及 12 (“∀ 规则”及“∃ 规则”) 是有作为真正自由变元身份的变元来参加的，故有上述的用语．至于别的公设，例如，公理模式 10，当应用时亦可把 t 取作自由变元，但在这里，这变元的使用方式却是：即使换为非变元的项 (例如 0) 亦是可以的．(至于我们使用自由变元来陈述群 B 的公设，那是无关重要的．)

谓词演算中的定理 1 所受的限制是：对被解除的假定公式言，自由变元在辅助推演中须是保持固定的．(这将在 §32 的解释中加以说明．)

1) 这条件依俄译注增入，原文误漏——译者注．

定理 1（续完） 对谓词演算言（或对数论的完全形式体系言），如果 $\Gamma, A \vdash B$，并且对最后的假定公式 A 言，所有自由变元是保持固定的，那末便有 $\Gamma \vdash A \supset B$。

证明同 §21 处，不过在归纳推步中新增两个情况须补行处理。

情形(e)：B 是由前面的公式应用规则 9 而得的直接后承。依照规则 9 的陈述，该前面的公式是型如 $C \supset A(x)$，其中 x 是一变元，$A(x)$ 是一公式，而 C 是一个不含自由 x 的公式。于是 B 便是 $C \supset \forall x A(x)$。我们再分两个子情形，视在所给的推演(及所给的分析)中，前面的公式 $C \supset A(x)$ 依赖于或不依赖于最后的假定公式 A 而定。

子情形(e1)：$C \supset A(x)$ 依赖于 A。这时 A 不含自由 x，否则对 A 言，自由变元在所给的推演中不再是保持固定的了，这与假设衝突。因为 A 及 C 均不含自由 x，故公式 $A \& C$ 便不含自由 x。这样便可使得下面第 $p+q+1$ 步处可以有根据地再一次应用规则 9. 把归纳假设施用于到 $C \supset A(x)$ 为止的前面一段所给的推演上，我们便得到由 Γ 到 $A \supset (C \supset A(x))$ 的推演。由这推演便可以得到结果推演如下.

	…	由 Γ 到 $A \supset (C \supset A(x))$ 的推演，由归纳假设而得的.
$p.$	$A \supset (C \supset A(x))$	由 $A \supset (C \supset A(x))$ 到 $A \& C \supset A(x)$ 的推演，见 (6′)：2(§ 21 末).
	…	
$p+q.$	$A \& C \supset A(x)$	
$p+q+1.$	$A \& C \supset \forall x A(x)$	——规则 9，$p+q$.
	…	由 $A \& C \supset \forall x A(x)$ 到 $A \supset (C \supset \forall x A(x))$ 的推演，见(7′).
$p+q+r+1.$	$A \supset (C \supset \forall x A(x))$	

子情形(e2)：$C \supset A(x)$（因而 $C \supset \forall x A(x)$）不依赖于 A. 那末在所给推演中便有一些子序列足以构成由其余的假定公式 Γ 到 $C \supset \forall x A(x)$ 的推演. 我们便可以如下地作出结果推演.

$\left\{\begin{array}{ll} & \cdots \quad \text{由}\ \Gamma\ \text{到}\ C\supset\forall xA(x)\text{，根据不依赖性假设.} \\ p. & C\supset\forall xA(x) \end{array}\right.$

$p+1.$ $(C\supset\forall xA(x))\supset(A\supset(C\supset\forall xA(x)))$——公理模式 1a

$p+2.$ $A\supset(C\supset\forall xA(x))$——规则 2, p, $p+1$.

情形 (f): B是由前面一公式应用规则 12 而得的直接后承。本情形的处理同上,不过在第一个子情形处两次使用 (5′):3.

推演定理第一次由厄勃朗 (Herbrand) [1930] 作为导出规则而证出. (又参见厄勃朗 [1928], 塔斯基 (Tarski) [1930], 邱吉 [1932], 希尔伯特-伯尔奈斯 [1934], 155 页, 雅史柯夫斯基 (Jaśkowski) [1934].)

§23. 逻辑符号的引入与消去

下列定理包含有一系列的导出规则，每行每列之首所列的字乃用以给出规则之名以备引用. 例如，"$\forall xA(x)\vdash A(t)$" 便叫做"全称消去"省称"∀ 消".

在两个规则中我们把变元 x 写作符号⊢的肩码，这用以表示在作成结果推演时曾对 x 而应用了规则 9 或 12.

定理 2 在下列规则中, A, B, C 或 x, A(x), C, t 所服从的约定和在相应的公设 (§ 19) 中相同, 而 Γ 或 $\Gamma(x)$ 则是任何一列公式.

对于命题演算言,由"蕴涵"起到"否定"止这些规则有效.

对于谓词演算(或数论完全系统)言,所有规则均有效,只须在每个辅助推演中，对被解除的假定公式言，自由变元是保持固定的.

	(引入)	(消去)
(蕴涵)	如果 Γ, $A\vdash B$, 则 $\Gamma\vdash A\supset B$.	A, $A\supset B\vdash B$. (假言取式 Modus ponens)
(合取)	A, $B\vdash A\&B$.	$A\&B\vdash A$. $A\&B\vdash B$.

（析取） $A\vdash A\vee B$.　　　　如果 $\Gamma, A\vdash C$ 及 $\Gamma, B\vdash C$,

$B\vdash A\vee B$.　　　　则 $\Gamma, A\vee B\vdash C$.

（穷举证法）

（否定） 如果 Γ, $A\vdash B$ 及　　　　$\neg\neg A\vdash A$

Γ, $A\vdash\neg B$,　　则 $\Gamma\vdash\neg A$.（双否定的解除）。

（反证法）

（全称） $A(x)\underset{x}{\vdash}\forall xA(x)$.　　　　$\forall xA(x)\vdash A(t)$.

（存在） $A(t)\vdash\exists xA(x)$.　　　　如果 $\Gamma(x), A(x)\vdash C$,

则 $\Gamma(x), \exists xA(x)\underset{x}{\vdash} C$.

证明 ⊃引入的规则便是定理 1，此外还有十个直接规则及三个辅助推演规则．直接规则由列出所需要的推演来证明．至于辅助推演规则的证明,则可把它写成一系列的元数学陈述(这些陈述有些可由于作出一个推演而得到证明，正如直接规则的证明那样,有些则由在前面的陈述应用定理 1 或⊢的一般性质而得)．无论哪种情形,都要用到相应的公设.下面对每一类型的规则都有一部分作了证明,有些则留给读者自证．但是,这里以及在类似的情形处,我们都希望读者先试行自证,即使我们给出了证明.

直接规则　⊃消

1. A——第一假定公式.
2. A⊃B——第二假定公式.
3. B——规则2，1，2.

这规则不过是把公设表中的规则 2（“⊃规则”或传统逻辑中的“假言取式”)重新叙述为一个导出规则罢了.

& 引.　我们已经在 §20(3′) 处给出.

¬消,或双重否定的解除.

1. ¬¬A——假定公式.
2. ¬¬A⊃A——公理模式 8.
3. A——规则 2，1，2.

∀引.　设 C 为一个不含自由 x 的公理.

1. A(x)——假定公式.

2. $A(x) \supset (C \supset A(x))$——公理模式 1a.

3. $C \supset A(x)$——规则 2，1，2.

4. $C \supset \forall x A(x)$——规则 9，3.

5. C——一个公理.

6. $\forall x A(x)$——规则 2，5，4.

辅助推演规则.　$\vee$消.

1. $\Gamma, A \vdash C$——题设.
2. $\Gamma \vdash A \supset C$——定理 1，1.
3. $\Gamma, B \vdash C$——题设.
4. $\Gamma \vdash B \supset C$——定理 1，3.
5. $A \supset C, B \supset C \vdash A \vee B \supset C$——用公理模式 6 及规则 2.
6. $A \vee B, A \vee B \supset C \vdash C$——$\supset$消(或用规则 2).
7. $\Gamma, A \vee B \vdash C$——2，4，5，6.

$\exists$消.

1. $\Gamma(x), A(x) \vdash C$——题设.
2. $\Gamma(x) \vdash^{x} A(x) \supset C$——定理 1，1.
3. $A(x) \supset C \vdash^{x} \exists x A(x) \supset C$——用规则 12.
4. $\exists x A(x), \exists x A(x) \supset C \vdash C$——$\supset$消.
5. $\Gamma(x), \exists x A(x) \vdash^{x} C$——2，3，4.

讨论.　这些规则把逻辑运算区分成逻辑符号的引入与消去，是根据坚钦[1934—35]而略作修改的.

“$\vee$消”规则的确可以消去析取符号，如下例所示.

1. $\vdash A \vee B$——设已给出.
2. $A \vdash C$——设已给出，并且对 A 言自由变元是保持固定的.
3. $B \vdash C$——设已给出，并且对 B 言自由变元是保持固定的.
4. $A \vee B \vdash C$——$\vee$消(这里 Γ 是空的)，2，3.
5. $\vdash C$——1，4.

这个过程对应于通常非形式的穷举证明方法：或 A 或 B. 情形 1：A 故 C. 情形 2：B 故 C. 故 C.

同样地，如下所示，用∃消可以消去一个存在符号.

1. $\vdash \exists x A(x)$——设已给出.

2. $A(x) \vdash C$——设已给出，并且这里C不含自由变元x，对A(x)言自由变元是保持固定的.

3. $\exists x A(x) \vdash C$——∃消，2.

4. $\vdash C$——1，3.

这对应于习见的论证：有一个x使得A(x)；试讨论这个x.则C，而C不依赖于x. 故C.

同样地，¬引对应于反证法.

应用定理中的Γ，所有这些过程都可以在任何多的补充假定公式之下而进行.

下面证明$A, \neg A \vdash B$（即：由一个矛盾A及¬A，可推出任何公式B）. 这我们将叫做弱¬消规则.

1. $A, \neg A, \neg B \vdash A$.

2. $A, \neg A, \neg B \vdash \neg A$.

3. $A, \neg A \vdash \neg\neg B$——¬引，1，2.

4. $\neg\neg B \vdash B$——¬消.

(9′) 5. $A, \neg A \vdash B$——3，4，这便是所要证明的.

第三步等于说，由于1,2中的矛盾A及¬A遂因而责怪公式¬B. 继续下去可得

6. $\neg A \vdash A \supset B$——⊃引，5.

7. $\vdash \neg A \supset (A \supset B)$——⊃引，6.

我们的形式体系是想把数论形式体系化，包含只为古典观点所能接受的方法（参见§13）. 但是，如果公理模式8（$\neg\neg A \supset A$）换为下者（参见(9′):7），那末所有的公设所表示的原则均可为直觉主义者所接受（参见§30末）了：

8^{I}. $\neg A \supset (A \supset B)$[1)]

1) 公设8^{I}表示下原则，"由矛盾可以推出随意的一切". 不含排中律也不含这原理的命题演算叫做极小演算（约翰逊（Johanson），[1936]），这演算只包含命题演算的公设1—7. 又，不用公设8的谓词演算及数论亦可使用'极小演算'一名（参见附录VII）——俄译注.

若就定理 2 的导出规则来立论，这个更改便等于把¬消换为弱¬消. 如果我们想同时讨论这个体系，可把用公设 8 的原来体系叫做古典系统，而改用 8^{I} 的系统则叫做(相应的)直觉主义系统. 如果某一证明不是对两个系统均有效而只是对古典系统才有效时(读者亦不能希望找出一个对直觉主义系统有效的证明)，其结果便用"°"号标明.

若先用 ∀ 引继用 ∀ 消我们便得到下列的规则.

个体变元的代入　如果 x 为一变元，A(x) 为一公式，而 t 为一项，且对 A(x) 的 x 言是自由的，则 $A(x) \overset{x}{\vdash} A(t)$.

在叙述导出规则的应用时，我们常常暗中使用⊢的一般性质而作出缩写.

例 1　试讨论下列的论证.

1. A, B⊢C——设已给出.
2. A&B⊢A——&消.
3. A&B⊢B——&消.
4. A&B⊢C——1, 2, 3.

我们缩写如下.

1. A, B⊢C——设已给出.
2. A&B⊢C——&消, 1.

设有"Γ⊢P, P⊢Q"(意指：Γ⊢P 及 P⊢Q)，我们缩写为"Γ⊢P⊢Q"；更多的推演也仿此，只要从第二个推演起，每一个推演均以前面一个推演的结论为其前提. (但"Γ⊢P, ⊢Q"表示 Γ⊢P 及⊢Q.)

例 2

1. A⊃B, A⊢B——⊃消.
2. B⊢B∨C——∨引.
3. A⊃B, A⊢B∨C——1, 2.

这我们缩写为

1. A⊃B, A⊢B⊢B∨C——⊃消, ∨引.

*§ 24. 依赖性及变化性

对谓词演算言，根据定理 2 的导出规则之一而得到的(即证明其存在的)推演，如果想用它作辅助推演以便再一次应用这些规则之一，我们必须(至少就我们所知道的)不但知道这些推演的存在，还要知道对所解除的假定公式言自由变元是保持固定的。

为了使得一旦需要时我们马上得到这方面的消息，所以每当应用一规则时，如果在结果推演中自由变元是变化的，我们都记载下来。我们可以把变化的那些变元写成符号$\vdash$的肩码。这记号当然不够充分明显，因为它没有表明所给的一个肩码上的变元是对那一个假定公式而变的。不过我们可简单的把肩码变元看作便是对自由地含有该变元的假定公式而变的。(如果需要更为明确，则可用文字叙述之，例如下文的引理 8a.)

注意，根据变化性的定义(§22)，只当一假定公式 D_j 含有自由变元 y 时，y 才对它是变化的。

容易看见，设给出[1]一推演 $D_1, \cdots, D_l \vdash E$，又指定假定公式 D_j 以及在 D_j 中自由出现的变元 y，我们总可以找出另一个由 $D_1, \cdots, D_l$ 到 E 的推演，在其中 y 对 D_j 是变化的。(提示：在推演中引入一些多余的步骤便成了.)因此我们的兴趣在于：有没有一推演 $D_1, \cdots, D_l \vdash E$，在其中 y 对 D_j 是不变化的；如果我们说变元 y 只对某某假定公式而变，那是指有一推演(具相同的假定公式及结论)，在其中 y 只对这些假定公式而变。

同样，给出任何推演 $D_1, \cdots, D_l \vdash E$，我们经常可以找出另一个由 $D_1, \cdots, D_l$ 到 E 的推演，使得其中的结论 E 是依赖于 D_j 的，故亦作出与上类似的约定。

记录变化性的过程是非常容易做出的(记录依赖性的亦然)。在我们的导出规则中需要记下肩码的只是 ∀ 引 ∃ 消及代入。(即

1) 这里(以后均同)，凡给出一推演时我们均理解为同时给出该推演的分析——俄译注。

使这时，肩码也不是经常必需的. 例如，在 ∀ 引或代入规则中，如果 A(x) 不含自由 x 时就不需要了. 又参见下文引理 7b.) 还有，当肩码已经写下后，我们必须按显然的方式把肩码继续写下去，由所给的推演直到结果的推演为止(除非有相反的理由)，不管在应用本节的辅助推演规则时也好，不管在兼用 ⊢ 的一般性质 (§20) 时的合并推演也好，都应如此.

在实际上发生的情况是非常简单的，所以我们处理它时将不会有大的困难. 变化的变元经常是为着直接的目的而预先已经引入，所以一般不容易被忽略掉的. 但是为着使得我们的导出规则理论可以完备起见，我们用下述各引理把事实叙述得更清楚些.

引理 6 就定理 1 言，在结果推演 $\Gamma \vdash A \supset B$ 中，$A \supset B$ 之依赖于 Γ 中某一给定的公式，必须在所给的推演 $\Gamma, A \vdash B$ 中. B 也依赖于同一给定的公式[1]. 同样，就定理 2 的其他辅助推演规则言，结果推演中的结论之依赖于 Γ 中某一给定的公式，必须在给出的推演中(或至少在给出的两个推演之一中)该结论也依赖于同一给定的公式.

因为，否则在应用该规则时，该假定公式可先从 Γ 中删去，然后再依照引理 5 的(II)及(IV)而引入该假定公式.

在 ∨ 消中，如果 C 不同时既依赖于 $\Gamma, A \vdash C$ 中的 A，又依赖于 $\Gamma, B \vdash C$ 中的 B，则 ∨ 消可以根本避而不用. 同样，如果 C 不依赖于 A(x)，则 ∃ 消也可根本不用.

引理 7a 就定理 1 言，在结果推演 $\Gamma \vdash A \supset B$ 中，某一变元之对 Γ 中某一给定的公式是变化的，必须在给定的推演 $\Gamma, A \vdash B$ 中，它对同一所给公式也是变化的. 同样，就定理 2 的其它辅助推演规则言也如此，但 ∃ 消中的变元 x 除外，关于它将在引理 7b 叙述之.

---

1) 该断定更准确些的意义是，"在定理 1 的条件下，如果有这样的一个由 Γ，A 到 B 的推演(及这推演的这样一个分析)，其中 B 不依赖于 Γ 中已给的公式，那末便有这样的一个由 Γ 到 $A \supset B$ 的推演(及这推演的这样一个分析)，而 $A \supset B$ 亦不依赖于所给的 Γ 中该公式". 引理 6 的第二个断定，引理 7a，7b，9 中有关于变元的变化性的断定均作同样的理解——俄译注.

引理 7b 就∃消言，在结果推演 $\Gamma(x), \exists x A(x) \overset{x}{\vdash} C$ 变元 x 只对 Γ 中下列的公式才是变化的；它含有自由 x 并且在已给的推演 $\Gamma(x), A(x) \vdash C$ 中 C 是依赖于它的．（在∃消中，任何变元对 $\exists x A(x)$ 都不变化；同样在 ∨ 消中，任何变元对 $A \vee B$ 都不变化．）

试检查定理 1 与 2 的证明便可以核验这两引理．就∃消言，如果在所给的推演中，x 对 $\Gamma(x)$ 中某一公式是变化的但 C 却不依赖于该公式，那末在作∃消时该公式便可以删去．

根据 $\vdash$ 的一般性质（引理 5 所给的性质）所作的步骤而引起的依赖性及变化性，读者可自行讨论，现在只讨论应用(V)时有关于 Δ 的变化性．在讨论这点前(见引理 9)，我们先证下述的两个基本引理．

引理 8a 如果

$$\text{(I)} \qquad D_1, D_2, \cdots, D_l \vdash E,$$

其中，对 $j=1,\cdots,l$ 言，只有变元 $y_{j1},\cdots,y_{jp_j}$ 对 D_j 是变化的（$y_{j1},\cdots,y_{jp_j}$ 等是两两不同的，但它们未必异于 $y_{k1},\cdots,y_{kp_k}$，$j \neq k$），那末便有

$$\text{(II)} \qquad \vdash \forall y_{11}\cdots\forall y_{1p_1} D_1 \supset (\forall y_{21}\cdots\forall y_{2p_2} D_2 \supset \cdots (\forall y_{l1}\cdots\forall y_{lp_l} D_l \supset E)\cdots)$$

逆理亦真．

若用 ∀ 消及 ⊃ 引可由(I)得(II)．反之，由 ∀ 引及 ⊃ 消可由(II)得(I)．

引理 8b 如果给出一个由 $D_1,\cdots,D_l$ 到 E 的推演，那末我们可改成另外一个由 $D_1,\cdots,D_l$ 到 E 的推演使得，把依赖于 D_j $(j=1\cdots,l)$ 的公式作为前提而应用规则 9 时，其应用变元[1]必是在原来的推演中就 D_j 而变化的；又应用规则 12 时，其前提绝不依赖于任何假定公式．

我们把所给的推演作为引理 8a 中的(I)，变到(II)，然后再回

1) 应用变元是指出现于规则 9 及规则 12 中的变元 x．本书原文偶尔使用这名词但未给以正式的定义，在译文中我们将尽可能地大量使用这个名词，故特补给以正式的定义(见前)——译者注．

过来得出另一个推演(I)．由(I)到(II)时，规则 9 及 12 只是对不依赖于假定公式的前提而应用的．再由(II)到(I)时，用到的∀引则恰如本引理中所叙述的．

引理 9 就引理 5 的(V)言，在结果推演 Δ,Γ├—E 中，一变元 y 对 Δ 中某一公式是变化的，仅当或者 (a) 在给定的第一个推演 Δ├—C 中，y 对 Δ 中该公式是变化的，或者(b)在给定的第二个推演 C,Γ├—E 中，y 对 C 是变化的，而在所给的第一个推演 Δ├—C 中，C 是依赖于 Δ 中该公式的，并且 Δ 中该公式是含有自由 y 的．

除却下列情况外，引理 9 可立刻证得．在所给的第二推演 C,Γ├—E 中，可能把一个依赖于 C 的一个公式作为前提就 y 而应用规则 9 或规则 12，由于 C 不含自由 y，故 y 对 C 保持固定．如果在推演 Δ├—C 中，C 依赖于 Δ 中某个含自由 y 的公式，那末，两推演合并后在结果推演 Δ,Γ├—E 中，对 Δ 中该公式言 y 将是变化的[1]．但我们可用引理 8b 来把原给的推演 C,Γ├—E 改作过再合并，上述的情况便对任何变元 y 都不会发生了．

今后，在新导出规则中，有关依赖性及变化性的事实将是很容易看出的，否则将予以指出，凡有变化性时，均用"⊢"的肩码指出．一般，在一个辅助推演规则中，其给定推演及结果推演的假定公式又有明显的对应时：在结果推演中，对某个给定的假定公式而言，结论是依赖于它的（或某一变元是变化的），必须在所给的推演或推演之一中，对相应的假定公式而言，亦有同样的情况．例子可见 §25 定理 3 及 4（依赖性），§34 的定理 15 及 16，§38 的形式归纳规则，§73 的定理 41(b)及(c)，§74 的定理 42 (III)—(V) 及定理 43(VIIa)—(VIIIb)，§81 的定理 59 及定理 60(b2)—(d)．

强∀引及强∃消． 有时我们在一个比较强的说法下使用∀引和∃消，它们允许更改变元．

引理 10 设 x 为一变元，A(x) 为一公式，而 b 为这样的一个

---

1) 这时它将与引理所说相矛盾——译者注．

变元：(i) b 对 A(x) 的 x 言是自由的，(ii) b 不自由出现于 A(x) 中(除非 b 为 x)。对 ∃ 消言，还须 C 是一个不含自由 b 的公式，并设在辅助推演中对 A(b) 言自由变元是保持固定的。那末有：

$A(b) \overset{b}{\vdash} \forall x A(x)$.　如果 $\Gamma(b), A(b) \vdash C$，则 $\Gamma(b), \exists x A(x) \overset{b}{\vdash} C$.

(强 ∀ 引)　　　　　　　　　　(强 ∃ 消)

证明　在 §22 例 3 中曾推出规则 $C \supset A(b) \overset{b}{\vdash} C \supset \forall x A(x)$. 若在关于 ∀ 引的形式证明 (§23) 中不用公设规则 9 而用本规则，我们便得到它的加强说法了[1].

导出规则与相应公设．我们把公设 1a，1b 及 2 叫做⊃公设，把公设 3，4a 及 4b 叫做 & 公设，公设 7，8(就直觉主义系统言则是 7，8')叫做¬公设等等．在证明定理 2 的所有导出规则时全都用到⊃公设．

引理 11　试在逻辑符号 ⊃，&，∨，¬，∀ 及 ∃ 中任意挑选一个或多个符号，并只由⊃公设及所选的符号的公设组成一个形式系统，在这个系统中，定理 2 的有关⊃和有关所选符号的规则依然成立(包括在强说法下的 ∀ 及 ∃ 规则，又在直觉主义系统中，¬规则须改用弱¬消规则)，但如果只挑选 ∀ 符号而不挑选 & 符号的话，∀ 公设中须加入一个新公理模式如下[2]，其中 x，A(x) 及 C 所受的限制和规则 9 的相同：

9a.　$\forall x(C \supset A(x)) \supset (C \supset \forall x A(x))$.

证明　试检查上述规则的证明便知．但如果该系统只有 ∀ 而无 & 时，须注意下列例外．即在处理定理 1(§22) 的情形(e)子情形(e1)时，要用到 & 公设．但当加入新的 ∀ 模式后，就可作如下的更改了．

p.　　$A \supset (C \supset A(x))$　　——同前

1) 强 ∃ 消也不难用同类方法证明——译者注．

2) 由下文的讨论，读者容易看见，如果公设 9 不用上文的形式而改用下列形式

$$\frac{C_1 \supset (C_2 \supset A(x))}{C_1 \supset (C_2 \supset \forall x A(x))}$$

(x，A(x) 的限制与上文相同，而 C_1，C_2 不含自由 x)，则可无须任何更改．以后引用这里结果时亦同——译者注．

$$\begin{cases} p+1. & A\supset\forall x(C\supset A(x)) \text{ ——规则 } 9, p. \\ p+2. & \forall x(C\supset A(x))\supset(C\supset\forall xA(x)) \text{——公理模式 } 9a. \\ & \cdots \text{由 } p+1 \text{ 与 } p+2 \text{ 根据 } 8'\text{: (1)(§21 末)的推演.} \\ p+q+2. & A\supset(C\supset\forall xA(x)) \end{cases}$$

树形推演. 我们已经把推演作为一些公式(的出现)的线形叙列. 有时如果改而考虑这些公式(的出现)所作成的偏序，它将更能直接地表出推演的逻辑结构,从而更为有用. 在这个排序中，每个推演的前提均直接写在结论之上，正如上文叙述推论规则时那样；而且没有一个公式(的出现)可以作为几个推演的前提. 依照以前方式排列的推演(或证明)我们说是序列形的；依照目前这样排列的则叫做树形的.

我们将用一个例子说明如何作出变形，把由Γ到E的推演从具有(给出分析的)序列形的形状变成具有树形的形状(希尔伯特与伯尔奈斯[1934],221页把这过程叫做“分析为证明脉”),或从具有树枝形的形状变成具有序列形的形状.

例 1 试考虑 §21 的推演(6). 根据分析,最后的公式 8 是 7 与 5 的直接后承. 我们把 7 与 5 直接写在 8 之上. 7 又为 1 与 6 的直接后承，故把 1 与 6 直接写在 7 之上等等. 如果只列编号 1—8,我们便得下列的图式.

(a)

$$\dfrac{\dfrac{1\qquad 6}{7}\qquad \dfrac{\dfrac{1\quad 2}{3}\qquad 4}{5}}{8}$$

如果写下公式本身(用新编号 1′～9′ 并附以分析)我们便得到树枝形的推演如下.

(b)

$$\dfrac{\dfrac{\underset{1'.A\&B}{\text{第一假定公式}}\qquad \underset{2'.A\&B\supset B}{\text{公理模式 4b}}}{3'.B}\,2\qquad \dfrac{\dfrac{\underset{4'.A\&B}{\text{第二假定公式}}\qquad \underset{5'.A\&B\supset A}{\text{公理模式 4a}}}{6'.A}\,2\qquad \underset{7'.A\supset(B\supset C)}{\text{第一假定公式}}}{8'.\ B\supset C}\,2}{9'.\ C}\,2$$

反之，从这个树枝形推演，由 $A \supset (B \supset C)$ 及 $A \& B$ 到 C 的，只要把这些公式(的出现)列成线形序列，例如依 $1'$—$9'$ 的次序，我们便得到序列形的推演(与原给的不同)了.

简单地说，树枝形的推演的一支是指，在树枝形结构范围之内，由上而下把公式(的出现)排成线形序列，从作为公理或假定公式而出现的公式开始，到达推演的结论（或尾公式）为止. 最长的一支的长度(即层数)叫做该树枝形推演的高度. 如果两公式同属一支但一公式在别公式之上，则说前一公式（的出现）在后公式之上(而后者在前者之下).

例 1(续完)　推演(b)有五支，即：$1', 3', 9'$；$2', 3', 9$；$4', 6', 8', 9'$；$5', 6', 8', 9'$；$7', 8', 9'$. 高度为 4. 公式 $4'$（的出现)在 $8'$ 之上但不在 $3'$ 之上.

第六章 命题演算

§25. 命题字母公式

在本章中我们把形式体系中只用群 A1 的公设的那一部分特别提出，以作深入的研究. 因此‘可证的’‘可推演的’及‘$\vdash$’的意义亦须作相应的理解.

根据 §17 中就全系统而给的关于‘公式’的定义，我们所有的公式都是建立在数论符号体系之中的. 但是如果我们只限于群 A1 的公设，这个符号体系还含有好些不相干的东西.

为了把命题演算应用到数论系统去，而把我们对它的处理的一般性加以限制，那是不满人意的. 但是另一方面，我们又必须为这个应用准备好基础.

现在，我们为命题演算的应用而给出‘公式’的另一定义，它可以消除数论式定义内不相干的东西.

我们首先引入一种新的形式符号

$$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}, \cdots$$

叫做命题字母，我们假定它们有(潜伏的)无穷多个. 下面便是‘公式’的新定义.

1. 命题字母是一公式. 2—5. 如果 A 与 B 为公式，那末 (A)$\supset$(B)，(A)&(B)，(A)$\vee$(B)及$\neg$(B) 亦是公式. 6. 只有由 1—5 给出的才是公式.

试将这定义与 §17 的定义比较，可见从前定义的句 1 被这里新的句 1 代替了，而句 6—7 则删去了. 如果我们想区别这两种公式的概念，则 §17 的可以叫做数论公式，而这里的叫做命题字母公式.

例 1 $\boldsymbol{A}\vee(\neg\boldsymbol{A}\vee\boldsymbol{B})$ 是一个命题字母公式（我们继续采用

§17 处所建立的惯例，把括号省去).

今后我们约定，在本章中，当我们说'公式'而没有明指其特别意义时，它可指命题字母公式，可指下章所定义的谓词字母公式，亦可指数论公式.（还可指别的适当意义的公式. 但为确定地方，我们只限于这三种，而不考虑下问题：别的意义中哪些算是适当的意义.）

因此，在本章中，凡是简单地提到"公式"的那些结果都可以不费多少思索就能应用到三个形式系统之一去，这三个系统都以群 A1 作为公设表，但公式的意义却不同. 这二个系统可以分别地叫做纯命题演算，谓词字母的命题演算和数论的命题演算.

但是我们的结果中，有一些结果却只用"命题字母公式"来叙述. 它们也可以一般地应用的. 唯一的差异点在于，这些结果更易于用命题字母来阐明，如果需要的话，读者可自行根据下文(定理 3 与 4)所给出的两条一般的翻译规则，把它们译成其它意义的公式.

设 $P_1, \cdots, P_m$ 为一列的不同的命题字母.（这里"P_1"，$\cdots$，"P_m"为元数学字母，用作命题字母的名，因为我们不想把我们的讨论局限于只用特殊的命题字母.）

一命题字母公式 A 叫做由 $P_1, \cdots, P_m$ 组成的，如果在 A 中除 $P_1, \cdots, P_m$ 外没有其它的命题字母出现.

例 2 $A \vee (\neg A \& B)$是由 A, B, C 组成的命题字母公式.

对一命题字母的代入(或对几个不同的命题字母的同时代入)和 §18 中对变元的代入所规定的一样，不同的是：现在无例外地对该字母的一切出现都代入（因为已经没有'约束出现'了）. 此外，在本节下文我们还使用一个运算叫做对一公式的一切出现作替换(或对几个不同公式的同时替换)，它可类似地定义(这时 §18 的定义中的 x 便变成了一个公式)；这运算是不会含混的，因为各个出现是不会彼此重叠的.

定理 3 命题字母的代入. 设 Γ 为一些命题字母公式而 E 是由不同的命题字母 $P_1, \cdots, P_m$ 组成的一个命题字母公式. 设

$A_1, \cdots, A_m$ 为公式. 当把 $P_1, \cdots, P_m$ 同时分别以 $A_1, \cdots, A_m$ 代入时,设 Γ 与 E 分别变成 Γ^* 与 E^*. 如果 $\Gamma \vdash E$,则 $\Gamma^* \vdash E^*$. (当 Γ 为空集时,便是: 如果 $\vdash E$ 则 $\vdash E^*$.)

证明 对群 A1 的公设言,对在公设中出现的 A, B, C 并未作什么要求,除却要求在每个公设的应用中它们须是一些固定的公式. 现在试讨论在纯命题演算中一个给定的由 Γ 到 E 的推演. 诸公式 Γ 与公式 E 是由不同命题字母 $P_1, \cdots, P_m$ 组成的命题字母公式,但除这些字母外,在推演的其它公式中可能出现其它的字母 $P_{m+1}, \cdots, P_{m+r}$. 设 $A_{m+1}, \cdots, A_{m+r}$ 为任何公式. 在所给推演的每个公式中,把每个命题字母 $P_1, \cdots, P_{m+r}$ 全都分别以 $A_1, \cdots, A_{m+r}$ 代入,在所给的推演中,对于公设的每一次应用,都将由于这个代入而把公设中的 A, B, C 变成表达式 A^*, B^*, C^* (A 的每次出现必变成 A^* 的一次出现等等). 表达式 A^*, B^*, C^* 等必仍为公式,因为由公式 $A_1, \cdots, A_{m+r}$ 而构成 A^*, B^*, C^* 的过程(即如何应用命题字母公式的定义中的句 2—5 之一), 恰和由命题字母 $P_1, \cdots, P_{m+r}$ 而构成 A, B, C 的过程相对应,后者仍使用定义中的同样的句子. 因此我们仍得到同样公设的应用. 因此所给的推演经过这代入后所变成的公式序列,仍构成一个推演,且有同样的分析,它便是由 Γ^* 到 E^* 的一个推演.

例 3 为说明这条规则的证明, 试考虑下列的由 $\boldsymbol{B}$ 到 $\boldsymbol{A} \supset \boldsymbol{B}$ 的推演.

1. $\boldsymbol{B}$——假定公式.

(a) 2. $\boldsymbol{B} \supset (\boldsymbol{A} \supset \boldsymbol{B})$——公理模式 1a.

3. $\boldsymbol{A} \supset \boldsymbol{B}$——规则2, 1, 2.

若把 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 分别代以 $\boldsymbol{B}, \neg \boldsymbol{A} \& \boldsymbol{C}$(或 $\exists c(a = c'), \neg a = 0$),我们便得到下列的推演(b)(或(c)),和(a)具有同样的分析:

1. $\neg \boldsymbol{A} \& \boldsymbol{C}$——假定公式.

(b) 2. $\neg \boldsymbol{A} \& \boldsymbol{C} \supset (\boldsymbol{B} \supset \neg \boldsymbol{A} \& \boldsymbol{C})$——公理模式 1a.

3. $\boldsymbol{B} \supset (\neg \boldsymbol{A} \& \boldsymbol{C})$——规则 2, 1, 2.

1. $\neg a = 0$——假定公式.

(c) 2. $\neg \boldsymbol{a}=0 \supset(\exists \boldsymbol{c}(\boldsymbol{a}=\boldsymbol{c}') \supset \neg \boldsymbol{a}=0)$——公理模式 1a.

3. $\exists \boldsymbol{c}(\boldsymbol{a}=\boldsymbol{c}') \supset \neg \boldsymbol{a}=0$——规则 2, 1, 2.

若仍用这两例来说明本规则的应用，我们知道(由于(a))有

(a′) $$\boldsymbol{B} \vdash \boldsymbol{A} \supset \boldsymbol{B}.$$

那末本规则便允许我们根据所说的代人而推得

(b′) $$\neg \boldsymbol{A} \& \boldsymbol{C} \vdash \boldsymbol{B} \supset \neg \boldsymbol{A} \& \boldsymbol{C}.$$

(c′) $$\neg \boldsymbol{a}=0 \vdash \exists \boldsymbol{c}(\boldsymbol{a}=\boldsymbol{c}') \supset \neg \boldsymbol{a}=0.$$

在第一种情形(由(a′)到(b′))，我们是在纯命题演算内使用这个规则，这时这个规则便成为一个辅助推演型的导出规则. 在第二种情形，由于代人以另一种意义的公式的缘故，我们是使用这个规则而由纯演算中的(a′)而推出数论命题演算中的(c′).

显然，(a′), (b′), (c′) 等等都可以包括在下列的陈述之内：如果 A, B 为公式则

(10′) $$\mathrm{B} \vdash \mathrm{A} \supset \mathrm{B}.$$

这规则的意义看来不过是，当已经应用特殊的命题字母 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$, ⋯等而建立了一个可推演性关系后，我们便可以在模式的形式中断定同样的关系，并用元数学字母“A”, “B”, “C”等来表示任何公式.

根据这个附注以及以前的注意(§22)，即当加人新公设后，直接型的规则 $\Gamma \vdash \mathrm{E}$ 永远继续有效，我们便可以知道，凡在本章中所获得的 $\Gamma \vdash \mathrm{E}$ 形的一切结果(不管用命题字母来叙述或否)，对以后各章永远有效，在那里(指以后各章——译者)，我们更多注意于各公式的结构，和在原来的形式体系的公设表中使用更多的公设.

附注 1 在纯命题演算中，代人可以每次只就一个变元 P_j 而进行，即使用该规则时，把 $\mathrm{A}_1, \cdots, \mathrm{A}_{j-1}, \mathrm{A}_{j+1}, \cdots, A_m$ 取作 $\mathrm{P}_1, \cdots, \mathrm{P}_{j-1}, \mathrm{P}_{j+1}, \cdots, \mathrm{P}_m$[1].

1) 其实，不限于命题演算，也不限于对命题字母的代人. 可以说，在任何演算中，对任何多个不同变元(任何种类)的同时代人，都可以每次只就一个变元进行. 但这时必须非常小心. 设在公式 A∨B 中，对 A, B 同时以 B, C 代人，可得公式 B∨C. 如果逐次代人，每次只代一个变元而不小心注意，则在 A∨B 中，对 A 以 B 代人得 B∨B，再对 B 以 C 代人，则得 C∨C，与原来结果不同了. 这表明，当

一公式叫做素的(对命题演算言)，如果它不具下列各形之一，$A \supset B$，A&B，$A \vee B$，$\neg A$，而A与B为公式.

例4 $a=0$，$\exists c(a=c')$及 $\forall c(a=c' \vee a=b)$是素的，但$\neg a=0$与$\neg a=0 \& \exists c(a=c')$则否. 就命题字母公式言，只当它是一个命题字母时才是素的.

因为在一公式中，运算子$\supset$，&，$\vee$，$\neg$的辖域可以毫无含混地认得出来(§17)，所以任何给定的公式都可以从素公式出发，根据唯一决定的方式，应用公式定义中的句2—5而构造出来. 一公式或一些公式所据以造出来的素公式便叫做该公式或公式集的不同的素成份(对命题演算言).

例5 $a=0 \vee (\neg a=0 \& \exists c(a=c')) \supset \forall c(a=c' \vee a=b)$的不同的素成份是 $a=0$，$\exists c(a=c')$，$\forall c(a=c' \vee a=b)$.

定理4 命题字母的逆代入 在定理3的条件之下，再设A_1，$\cdots$，A_m为不同的素公式，那就有：如果 $\Gamma^* \vdash E^*$，则$\Gamma \vdash E$.

证明 试考虑一个给定的由Γ^*到E^*的推演. 在公式Γ^*与E^*中，不同的素成份是公式 $A_1, \cdots, A_m$. 推演中其它的公式可能有一些新的不同素成份 $A_{m+1}, \cdots, A_{m+r}$. 设 $P_{m+1}, \cdots, P_{m+r}$ 为命题字母. 在所给的推演的所有公式中，试把 $A_1, \cdots, A_{m+r}$ 的每一次出现都同时分别替换以 $P_1, \cdots, P_{m+r}$. 试考虑在所给的由Γ^*到E^*的推演中各公设的应用. 马上可以看出(用§17所例释的引理3)，这些替换是在公设中的A，B，C之内实行的，替换结果得出命题字母公式A'，B'，C'，A的每次出现都变成A'的每次出现等等. 因此，所给的由Γ^*到E^*的推演便变成命题字母公式的一个序列，这序列就是由Γ到E的推演，且具有同样的分析. 由本证明的方法可以看见，这个逆代入规则亦可以表述如下：

把多个变元的同时代入改为逐次对一个变元的代入时，不能照原来的规定逐次做去，而应先做一番准备工作. 准备工作可如下做去. 凡在E中对 $P_1, \cdots, P_m$ 同时以 $A_1, \cdots, A_m$ 代入时，如想每次只对一个变元代入，可挑选不出现于 E. $A_1, \cdots, A_m$ 的任何一个之中的变元 $Q_1, \cdots, Q_m$，然后以 Q_1 代P_1，以Q_2代$P_2, \cdots$，以Q_m代P_m，以A_1代Q_1，以A_2代 $Q_2, \cdots$，以A_m代Q_m便得. 例如，在上面的例子中，可逐次得出 $Q_1 \vee B$，$Q_1 \vee Q_2$，$B \vee Q_2$，$B \vee C$，与原来结果相同，又参看§30例3——译者注.

定理 4(第二说法). 设 Γ^* 为一些公式，E^* 为一公式，以 $A_1,\cdots,A_m$ 为其不同的素成份. 设 $P_1,\cdots,P_m$ 为命题字母,不必不同. 设把 $A_1,\cdots,A_m$ 的所有出现均同时分别代以 $P_1,\cdots,P_m$ 时 Γ^*,E^*分别变成 Γ, E. 如果 $\Gamma^*\vdash E^*$则 $\Gamma\vdash E$.

除非把"公式"理解为命题字母公式以外的公式，否则定理 4 包括于定理 3 之中.

例 6 为了说明这个证明，设在所给的由 Γ^* 到 E^* 的推演中(例如在例 3(c)步骤 2 处)，$\neg a=0\supset(\exists c(a=c')\supset\neg a=0)$这公式根据模式 1a 作为一个公理而出现. 现在试把彼此不同的素成份 $\boldsymbol{a}=0$, $\exists \boldsymbol{c}(\boldsymbol{a}=\boldsymbol{c}')$分别代以命题字母 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$(或均同代以 $\boldsymbol{A}$)，我们便得$\neg\boldsymbol{A}\supset(\boldsymbol{B}\supset\neg\boldsymbol{A})$(或$\neg\boldsymbol{A}\supset(\boldsymbol{A}\supset\neg\boldsymbol{A})$)，这是一个根据模式 1a 的纯命题演算的一个公理. 但如果把 $\boldsymbol{a}=0$ 及 $\exists\boldsymbol{c}(\boldsymbol{a}=\boldsymbol{c}')\supset\neg\boldsymbol{a}=0$ (后者不是素的)代以 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 或者把三个素成份 $\boldsymbol{a}=0$, $\exists\boldsymbol{c}(\boldsymbol{a}=\boldsymbol{c}')$, $\boldsymbol{a}=0$ (首尾两者并非不同的) 代以 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$, 结果便不是根据模式 1a 的公理.

例 7 为了例释逆规则的应用,我们先承认(在 §28 例 3 处将作证明) 在纯命题演算中 $\boldsymbol{A}\vee(\neg\boldsymbol{A}\&\boldsymbol{B})$ 是不能证明的. 若把 $\boldsymbol{a}=0$ 及 $\exists\boldsymbol{c}(\boldsymbol{a}=\boldsymbol{c}')$ 分别替换 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, 根据逆规则可知在数论的命题演算中,$\boldsymbol{a}=0\vee(\neg\boldsymbol{a}=0\&\exists\boldsymbol{c}(\boldsymbol{a}=\boldsymbol{c}'))$是不能证明的,即在我们的原来系统中,这公式不能只根据群 A1 的公设而证明(虽则若用全体公设它是可以证明的，见 § 39). 但却不能从纯演算中 $\boldsymbol{A}\vee(\neg\boldsymbol{A}\&\boldsymbol{B})$ 的不可证性推出数论命题演算中 $\boldsymbol{a}=0\vee(\neg\boldsymbol{a}=0\&\neg\boldsymbol{a}=0)$的不可证性. 为什么呢?

§ 26. 等价性,替换

设 A, B 为公式. 我们把 $(A\supset B)\&(B\supset A)$ 缩写为 "$A\sim B$". 符号"$\sim$"可以读作"等价于". 它和形式运算子有同样的作用，当放在系统中两个公式之间的时候它便给出系统中另一个公式. 当省去括号时,它的秩在其它的形式运算子之前(§ 17).

我们说，在命题演算中或别的形式体系中A等价于B，如果在该形式体系中有$\vdash A\sim B$. 这里，"等价于"一语是作为元数学上的动词来使用的，当把它放在系统中两个公式之间的时候，便给出关于该两公式的一个陈述.

定理5 如果A，B与C为公式，则:

*1. $\vdash A\supset A$.　　*2. $A\supset B, B\supset C\vdash A\supset C$.

*3. $A\supset(B\supset C)\vdash B\supset(A\supset C)$.

*4. $A\supset(B\supset C)\vdash A\&B\supset C$.　　*5. $A\&B\supset C\vdash A\supset(B\supset C)$.

(同一律，连锁推论律，互换前提律，输入律，输出律.)

*6. $A\supset B\vdash(B\supset C)\supset(A\supset C)$.　*7. $A\supset B\vdash(C\supset A)\supset(C\supset B)$.

*8a. $A\supset B\vdash A\&C\supset B\&C$.　　*8b. $A\supset B\vdash C\&A\supset C\&B$.

*9a. $A\supset B\vdash A\vee C\supset B\vee C$.　　*9b. $A\supset B\vdash C\vee A\supset C\vee B$.

(在一蕴涵式中引入结论，引入前提，引入合取项，引入析取项.)

*10a. $\neg A\vdash A\supset B$.　*10b. $A\vdash\neg A\supset B$.　*11. $B\vdash A\supset B$.

(依驳其前提或证其结论而证一蕴涵式.)

*12. $A\supset B\vdash\neg B\supset\neg A$.　　*13. $A\supset\neg B\vdash B\supset\neg A$.

14°. $\neg A\supset B\vdash\neg B\supset A$.　　*15°. $\neg A\supset\neg B\vdash B\supset A$.

(换质位及删去双重否定的换质位.)

*16. $A\supset B, B\supset A\vdash A\sim B$.

*17a. $A\sim B\vdash A\supset B$.　　*17b. $A\sim B\vdash B\supset A$.

*18a. $A\sim B, A\vdash B$.　　*18b. $A\sim B, B\vdash A$.

(根据用$\supset$及&表示的关于$\sim$的定义.)

*19. $\vdash A\sim A$.　*20. $A\sim B\vdash B\sim A$.　*21. $A\sim B, B\sim C\vdash A\sim C$.

(等价关系的自反性，对称性及可传性.)

*22. $A\supset(B\supset C), \neg\neg A, \neg\neg B\vdash\neg\neg C$.

*23. $\neg\neg(A\supset B)\vdash\neg\neg A\supset\neg\neg B$.

*24. $\neg\neg(A\supset B), \neg\neg(B\supset C)\vdash\neg\neg(A\supset C)$.

*25. $\vdash\neg\neg(A\&B)\sim\neg\neg A\&\neg\neg B$，在特例有

$\vdash\neg\neg(A\sim B)\sim\neg\neg(A\supset B)\&\neg\neg(B\supset A)$.

(对直觉主义系统有趣的一些补充结果.)

证明 其中八个已经证明过了，如下：*1 见 §20(1′)；*2 见 §21(8′)：1；*3 见 §21(5′)：3；*4 见 §21(6′)：2；*5 见 §21(7′)；*6 见 §21(8′)：2；*10a 见[1] §23(9′)：6；*11 见 §25(10′)．其余的读者可用定理 2 所引的命题演算的导出规则(§23)而证明之．例如：

*9a. 1. $A \supset B, A \vdash B \vdash B \vee C$——⊃消，∨引．

2. $A \supset B, C \vdash B \vee C$——∨引．

3. $A \supset B, A \vee C \vdash B \vee C$——∨消，1，2．

4. $A \supset B \vdash A \vee C \supset B \vee C$——⊃引，3．

*12. 1. $A \supset B, \neg B, A \vdash B$——⊃消．

2. $A \supset B, \neg B, A \vdash \neg B$．

3. $A \supset B, \neg B \vdash \neg A$——¬引，1，2．

4. $A \supset B \vdash \neg B \supset \neg A$——⊃引，3．

*14. 仿*12，但在第三步骤处须再使用¬消．

*22. 1. $A \supset (B \supset C), B \vdash A \supset C$——⊃消，*3(或 §21(5′)：2)．

2. $A \supset (B \supset C), B \vdash \neg\neg A \supset \neg\neg C$——*12 两次，1．

3. $A \supset (B \supset C), \neg\neg A \vdash B \supset \neg\neg C$——⊃消，⊃引，2．

4. $A \supset (B \supset C), \neg\neg A \vdash \neg\neg B \supset \neg\neg C$——*13，*12，3．

*23. 在*22 中把 A，B，C 分别取为 $A \supset B$，A，B 便得

1. $(A \supset B) \supset (A \supset B), \neg\neg(A \supset B), \neg\neg A \vdash \neg\neg B$．但我们有：

2. $\vdash (A \supset B) \supset (A \supset B)$——*1．故得：

3. $\neg\neg(A \supset B), \neg\neg A \vdash \neg\neg B$——1，2．

*24. 在*22 中把 A，B，C 分别取为 $A \supset B$，$B \supset C$ 及 $A \supset C$ 便得

1. $(A \supset B) \supset ((B \supset C) \supset (A \supset C)), \neg\neg(A \supset B), \neg\neg(B \supset C) \vdash \neg\neg(A \supset C)$．但是我们有：

2. $\vdash (A \supset B) \supset ((B \supset C) \supset (A \supset C))$——⊃引，*6．

---

1) 在(9′)：6 的证明既用到 8°，自不适用于直觉主义系统，对后者须改用 8^I 才对．今后凡直觉主义系统及古典系统同时成立的定理(即不标有“°”号的)，如果作者只给出古典的(而为直觉主义者不承认的)证明，译者均特别注出，望读者补充直觉主义的证明，这样才算系统完整——译者注．

*25. 在*22 中把 A, B, C 分别取为 A, B, A&B, 并用公理模式 3 (§19)便得 $\neg\neg A, \neg\neg B \vdash \neg\neg(A\&B)$. 若应用*12 两次于公理模式 4a 便得$\vdash \neg\neg(A\&B) \supset \neg\neg A$ 等等.

替换 设 A 为一形式表达式. 试考虑另一形式表达式 C[1]. 可能 A 作为 C 的一个(连续的)部分而出现;并且,这还可以在多种方式之下而发生. 今设的确如此,如果还有多种方式的话,则可明指(即特别指定之意——译者) A 在 C 中的某一个出现[2]. 当已把 A 在 C 中的某一个出现作了明指后 C 可以记为“C_A”. 若用毗连记法, C_A 便是 EAF, 其中 E 及 F 为在该明指部分 A 以前及以后的部分(可能为空部分). 今设 B 为一形式表达式. 把 C 中该明指部分 A 替换以 B 的结果便是表达式 EBF. 这可记为“C_B”.

试将这里的替换定义与 §18 所给的代入定义作比较. 替换是对由一个或多个符号所成的表达式的一个明指出现处而作的. 代入则是对一个符号的所有出现处而作的, 如果分别‘自由’出现与‘约束’出现的话,则只对所有自由出现处而作. (在 §25 中我们是就所有出现处而作替换的, 这不过相当于继续施行这里所定义的替换吧了, 即对一表达式中某个表达式的原来不相交叠的各出现处继续施行这里的替换.)

例 1 如果 A 是 $\boldsymbol{A}\supset\boldsymbol{B}$, C_A 是 $(\boldsymbol{A}\supset\boldsymbol{B})\&\neg((\underline{\boldsymbol{A}\supset\boldsymbol{B}})\vee\neg\boldsymbol{A})$,而 B 是$\neg\boldsymbol{A}\vee\boldsymbol{B}$,则 C_B 是 $(\mathbf{A}\supset\mathbf{B})\&\neg((\neg\boldsymbol{A}\vee\boldsymbol{B})\vee\neg\boldsymbol{A})$.

上面的替换定义是对一般的形式表达式而作的. 当 A, C_A 及 B 都是命题字母公式(如例 1)时, 我们便有下列的情况(若根据命题字母公式的定义(§25)而对运算子的辖域 (§17) 加以分析,便可以严格地证明了): 公式 C_A 可以由明指部分 A 出发, 应用命题字母公式的定义中句子 2—5 而作出, 若用平行的步骤但由 B 出发时,便可以由 B 而作出 C_B. 当 A 给出后, 由 A 而作出 C_A 的步骤个数,除去作出不含 A 的明指出现的那些部分所需的步骤外,便叫做

---

1) A, C 均未必为公式——译者注.

2) 在本节中(见例 1),这明指是用标出底线而给出的——俄译注.

在C中A的该出现的深度．换句话说，C_A 中部分A的深度是指所有其辖域中含有A的那些运算子的个数．

例1(续)　由A到 C_A 及由B到 C_B 的平行构造如下，而深度为3．

$A \supset B$	$\neg A \vee B$
$(A \supset B) \vee \neg A$	$(\neg A \vee B) \vee \neg A$
$\neg((A \supset B) \vee \neg A)$	$\neg((\neg A \vee B) \vee \neg A)$
$(A \supset B) \& \neg((A \supset B) \vee \neg A)$	$(A \supset B) \& \neg((\neg A \vee B) \vee \neg A)$

定理6　如果A，B，C_A 及 C_B 为命题字母公式，它们的关系恰如上面的替换定义处所叙述，那末 $A \sim B \vdash C_A \sim C_B$．(替换定理)

证明　就A在 C_A 中的深度而作归纳，在归纳时A与B固定．归纳命题是：设A，B固定，C_A 为任一公式，其中A的某个明指出现的深度为 d，那末定理所述的是真确的．**奠基**：A在 C_A 中的深度为0．这时 C_A 为A而 C_B 为B．本定理的结论是：$A \sim B \vdash A \sim B$，这可由 $\vdash$ 的一般性质推得．**归纳推步**：A在 C_A 中的深度为 $d+1$．根据归纳假设，对任何命题字母公式 M_A，只要在其中A的明指出现有深度 d，我们便有 $A \sim B \vdash M_A \sim M_B$．但 C_A 必为下列七形之一：$M_A \supset N$，$N \supset M_A$，$M_A \& N$，$N \& M_A$，$M_A \vee N$，$N \vee M_A$，$\neg M_A$，其中 M_A 与N为命题字母公式，而A在 M_A 中具深度 d．根据归纳假设有 $A \sim B \vdash M_A \sim M_B$．更由下列引理中适当的一款(把 M_A 作为引理中的A，M_B 作为B而N作为C)便得 $M_A \sim M_B \vdash C_A \sim C_B$．故得 $A \sim B \vdash C_A \sim C_B$．

关于替换的引理　如果A，B与C为公式，则：

*26. $A \sim B \vdash A \supset C \sim B \supset C$.　　*27. $A \sim B \vdash C \supset A \sim C \supset B$.

*28a. $A \sim B \vdash A \& C \sim B \& C$.　　*28b. $A \sim B \vdash C \& A \sim C \& B$.

*29a. $A \sim B \vdash A \vee C \sim B \vee C$.　　*29b. $A \sim B \vdash C \vee A \sim C \vee B$.

*30. $A \sim B \vdash \neg A \sim \neg B$.

证明

*26. 1. $A \sim B \vdash B \supset A$——&消(*17b).

2. $A \sim B \vdash (A \supset C) \supset (B \supset C)$——*6, 1.

3. $A \sim B \vdash (B \supset C) \supset (A \supset C)$——仿上，但用*17a及 *6.

4. $A \sim B \vdash A \supset C \sim B \supset C$——& 引.(*16), 2, 3.

*27. 仿上，用*17a 及*7，再用*17b 及*7.

例 1(续完) 在 C_A 与 C_B 的平行构造过程中，试把～写在四对公式的中间.所得的四个结果公式，第二个可由第一个根据*29a而推出，第三个可由第二个根据 *30 而推出，第四个由第三个根据 *28b 而推出. 继续合并这些推演，我们便得到由 $A \sim B$ 到 $C_A \sim C_B$ 的推演，这是根据定理 6 的证明方法而得到的.

定理 6 是就命题字母公式而叙述的. 但根据代入规则 (§25 定理3)它亦可以适用于别种意义的公式，只要 A, B, C_A 可由命题字母公式把其中的命题字母同时代入以公式而得的便成. 因此，或者直接用上文定理 6 的证明方法便得:

定理 6(第二说法) 如果 A, B 为公式，C_A 是由 A 的一个明指出现只用运算子⊃, &, ∨, ┐而组成的公式，把 A 的这个出现换为 B 后 C_A 变成 C_B，那末: $A \sim B \vdash C_A \sim C_B$.

例 2 设 x 为一变元，A, B 与 C(x) 为公式. 由定理得 $A \sim B \vdash A \vee \forall x(A \supset C(x)) \sim B \vee \forall x(A \supset C(x))$. (这可当作从 $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B} \vdash \boldsymbol{A} \vee \boldsymbol{C} \sim \boldsymbol{B} \vee \boldsymbol{C}$ 中对 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$ 分别代入以 A, B, $\forall x(A \supset C(x))$ 而得.) 但我们现有的工具不足以由 $A \sim B$ 而推出 $A \vee \forall x(A \supset C(x)) \sim A \vee \forall x(B \supset C(x))$，这里须被替代的 A 的出现是在 $\forall x(A \supset C(x))$的内部，因此 C_A 不能由这个 A 的出现仅仅用运算子⊃, &, ∨, ┐而构成.

系 在定理(任一说法)的条件下，有: $A \sim B, C_A \vdash C_B$.(等价关系的替换性.)

由定理 6 依 *18a 而得. (反之，根据 *19，把 $C_A \sim C_A$ 作为系中的 C_A，便可以由系与 *19 而得出定理 6 来. 本定理以各引理 *20—*30 作为特例，即深度为 1 时的特例.)

我们所讨论的结果是就每次只对 A 的一个出现作替换而言的. 但这结果继续用下去便可以对任何多个出现作替换了.

等价链 在证明命题字母公式的等价关系时，我们可以用下

列的缩写法来表示．如果对于每个 $i(i=1,\cdots,n)$或者：

(a) C_i 与 C_{i-1} 是同一个公式；或者

(b_1) $\vdash C_{i-1} \sim C_i$ 或 (b_2)$\vdash C_i \sim C_{i-1}$；或者

(c) 当有(1)$\vdash A_i \sim B_i$ 或 (2)$\vdash B_i \sim A_i$ 时，把 A_i 的一处或多处出现换为 B_i 后可由 C_{i-1} 得出 C_i；

这时我们便写

$$\vdash C_0 \sim C_1 \sim \cdots \sim C_{n-1} \sim C_n.$$

这样，我们可把"$C_0 \sim C_1 \sim \cdots \sim C_{n-1} \sim C_n$"当作 $(\cdots((C_0 \sim C_1) \& (C_1 \sim C_2)) \& \cdots \& (C_{n-2} \sim C_{n-1})) \& (C_{n-1} \sim C_n)$ 的缩写；并可认为对任何一对 $j,k(j,k=0,\cdots,n)$ 都有$\vdash C_j \sim C_k$．因为对每个 i 而言，我们或有$\vdash C_{i-1} \sim C_i$ 或有$\vdash C_i \sim C_{i-1}$，在情形(a)时这可由 *19 得证，在情形(b)时立即得证，在情形(c)时由定理 6 得证．故根据 *19，*20 及 *21，对一切 j，k 都有$\vdash C_j \sim C_k$．当在符号"$\vdash$"以前从始到终都有一系列的假定公式 Γ 写着时这方法同样适用．在链的接榫处我们可以插入方括号[1]用以记载一些解释性的注释．(例子可见 §27 中 *57 的证明．)

如果不是～而是别的一些关系记号，但该关系却已证明有自反性、对称性、可传性及替换性时，同样可用链方法．此外，如果这些性质不全具有时(但可传性必具)，亦可使用这方法而须如下修正．如果对称性欠缺，则删去(b_2)及(c)(2)而要求 $j \leqslant k$．如果再缺少自反性，再删去(a)并要求 $j < k$．如果替换性欠缺时删去(c)．(例子可见第八章：具有所有性质的是 $=$；欠缺对称性及替换性的是 $\leqslant$；更欠缺自反性的是 $<$．)

§27. 等价式，对偶原则

定理 7 如果 A，B，C 为公式则有：

*31. $\vdash (A \& B) \& C \sim A \& (B \& C)$. *32. $\vdash (A \vee B) \vee C \sim A \vee (B \vee C)$.

---

1) 按有时为避免方括号过多起见，作者亦改用圆括号，如 §74 引理 25*184 的证明处等等，今后我们不必过于注意所用括号的种类——译者注．

*33. $\vdash A\&B \sim B\&A$. *34. $\vdash A\vee B \sim B\vee A$.

*35. $\vdash A\&(B\vee C) \sim (A\&B)\vee(A\&C)$. *36. $\vdash A\vee(B\&C)\sim(A\vee B)\&(A\vee C)$.

*37. $\vdash A\&A \sim A$. *38. $\vdash A\vee A \sim A$.

*39. $\vdash A\&(A\vee B) \sim A$. *40. $\vdash A\vee(A\&B) \sim A$.

（结合律，可换律，分配律，幂等律及消元律.）

*41. $A\vdash A\supset B \sim B$. *42. $B\vdash A\supset B \sim B$.

*43. $\neg A\vdash A\supset B \sim \neg A$. *44. $\neg B\vdash A\supset B \sim \neg A$.

*45. $B\vdash A\&B \sim A$. *46. $B\vdash A\vee B \sim B$.

*47. $\neg B\vdash A\&B \sim B$. *48. $\neg B\vdash A\vee B \sim A$.

（蕴涵式、合取式、析取式的特例.）

*49° $\vdash \neg\neg A \sim A$.

*50. $\vdash \neg(A\&\neg A)$. *51° $\vdash A\vee\neg A$.

（双否律，不矛盾律及排中律.）

*52° $\vdash A\&(B\vee\neg B) \sim A$. *53. $\vdash A\vee(B\&\neg B) \sim A$.

*54. $\vdash A\&B\&\neg B \sim B\&\neg B$. *55° $\vdash A\vee B\vee\neg B \sim B\vee\neg B$.

（用以简化合取的析取式及析取的合取式.）

*56° $\vdash A\vee B \sim \neg(\neg A\&\neg B)$. *57° $\vdash A\&B \sim \neg(\neg A\vee\neg B)$.

*58° $\vdash A\supset B \sim \neg(A\&\neg B)$. *59° $\vdash A\supset B \sim \neg A\vee B$.

*60° $\vdash A\&B \sim \neg(A\supset\neg B)$. *61° $\vdash A\vee B \sim \neg A\supset B$.

（$\supset$，&，$\vee$ 中任意两者可由其余一个及$\neg$而表示.）

*62° $\vdash \neg(A\&B) \sim \neg A\vee\neg B$. *63. $\vdash \neg(A\vee B) \sim \neg A\&\neg B$.

（把$\neg$移过&及$\vee$（德莫干律[1847]）.）

*49a. $\vdash A\supset\neg\neg A$. *49b. $\vdash \neg\neg\neg A \sim \neg A$.

*49c. $\vdash A\vee\neg A\supset(\neg\neg A\supset A)$；故$\vdash A\vee\neg A\supset(\neg\neg A \sim A)$.

*50a. $\vdash \neg(A \sim \neg A)$. *51a. $\vdash \neg\neg(A\vee\neg A)$.

*56a. $\vdash A\vee B\supset\neg(\neg A\&\neg B)$. *51b. $\vdash \neg\neg(\neg\neg A\supset A)$.

*56b. $\vdash \neg A\vee B\supset\neg(A\&\neg B)$. *57a. $\vdash A\&B\supset\neg(\neg A\vee\neg B)$.

*58a. $\vdash (A\supset B)\supset\neg(A\&\neg B)$. *57b. $\vdash A\&\neg B\supset\neg(\neg A\vee B)$.

*58b-d. $\vdash A\supset\neg B\sim\neg(A\&B)\sim\neg\neg A\supset\neg B\sim\neg\neg(\neg A\vee\neg B)$.

*58e,f. ¬¬B⊃B⊢¬¬A⊃B ~ A⊃B ~ ¬(A&¬B).

*58g. ⊢(¬¬A⊃B)⊃¬(A&¬B). *59a.⊢¬A∨B⊃(A⊃B).

*60a. ⊢A&B⊃¬(A⊃¬B). *59b.⊢(A⊃B)⊃¬¬(¬A∨B).

*60b. ⊢A&¬B⊃¬(A⊃B). *59c.⊢(¬A⊃B)⊃¬¬(A∨B).

*60c. ⊢¬¬A&B⊃¬(A⊃¬B). *61a. ⊢A∨B⊃(¬A⊃B).

*60d-f. ⊢¬¬A&¬B ~¬(A⊃B)~¬(¬A∨B)~¬¬(A&¬B).

*60g-i. ⊢¬¬(A⊃B)~¬(A&¬B)~A⊃¬¬B~¬¬A⊃¬¬B.

*62a. ⊢¬A∨¬B⊃¬(A&B). *61b. ⊢¬(A∨B) ~ (¬A⊃B).

(对直觉主义系统有趣的一些补充结果.)

古典系统中的证明，但*32，*34，*36，*38，*40，*53及*55须除外. 如果把这七个公式的证明放在对偶原则(定理8系)之后,可以少费一些工夫.

*35. 1. A,B⊢A&B⊢(A&B)∨(A&C)——&引,∨引.

2. A,C⊢A&C⊢(A&B)∨(A&C)——&引,∨引.

3. A, B∨C⊢(A&B)∨(A&C)——∨消, 1, 2.

4. A&(B∨C)⊢(A&B)∨(A&C)——&消, 3.

5. ⊢A&(B∨C)⊃(A&B)∨(A&C)——⊃引, 4.

6. A&B⊢A——&消.

7. A&B⊢B⊢B∨C——&消,∨引.

8. A&B⊢A&(B∨C)——&引, 6, 7.

9. A&C⊢A&(B∨C)——仿上.

10. (A&B)∨(A&C)⊢A&(B∨C)——∨消, 8, 9.

11. ⊢(A&B)∨(A&C)⊃A&(B∨C)——⊃引, 10.

12. ⊢A&(B∨C) ~ (A&B)∨(A&C)——&引(*16), 5, 11.

(译者按,本证明亦是直觉主义的证明.)

*49. 1. ⊢¬¬A⊃A——¬消,⊃引(或公理模式8).

2. A, ¬A⊢A.

3. A, ¬A⊢¬A.

4. A├─┐┐A──┐引，2，3；等等.

（译者按，由 2—4 再用⊃引即得 *49a 的直觉主义证明.）

*51. 1. ┐(A∨┐A)，A├─A∨┐A──∨引.

2. ┐(A∨┐A)，A├─┐(A∨┐A).

3. ┐(A∨┐A)├─┐A──┐引，1，2.

4. ┐(A∨┐A)├─┐┐A──仿上.

5. ├─┐┐(A∨┐A)──┐引，3，4.

6. ├─A∨┐A──┐消，5.

附注 1 因此在一个没有公理模式 8 的形式体系内有┐┐B⊃B├─A∨┐A，这里 B 为 A∨┐A. 反之，在直觉主义系统内有 A∨┐A├─┐┐A⊃A，因为：

1. A├─┐┐A⊃A──*11.

2. ┐A├─┐┐A⊃A──*10b.

3. A∨┐A├─┐┐A⊃A──∨消，1，2.

因此或┐┐A⊃A 或 A∨┐A 都可以选作古典系统的一个非直觉主义公设.

*52. 由 *45 及 *51 可得.

*54. 同样地由 *47 及 *50 而得. 结果中已把括号省去，因为根据 *31，合取项的结合的方式是无关重要的.

*56. 1. A，┐A&┐B├─A.

2. A，┐A&┐B├─┐A──&消.

3. A├─┐(┐A&┐B)──┐引，1，2.

4. B├─┐(┐A&┐B)──仿上.

5 ├─A∨B⊃┐(┐A&┐B)──∨消，3，4，⊃引.

6. ┐(A∨B)，A├─A∨B──∨引.

7. ┐(A∨B)，A├─┐(A∨B).

8. ┐(A∨B)├─┐A──┐引，6，7.

9. ┐(A∨B)├─┐B──仿上.

10. ├─┐(A∨B)⊃┐A&┐B──&引，8，9，⊃引.

11. ├─┐(┐A&┐B)⊃A∨B──换质位（*14），10.

*57. 证明可用等价链表示如下：$\vdash \neg(\neg A \vee \neg B) \sim \neg\neg(\neg\neg A \& \neg\neg B)$[*56] $\sim \neg\neg A \& \neg\neg B$[*49] $\sim A \& B$[*49].

*58—*63. 试用链方法而证之.

直觉主义系统内的证明[1] *49c 由附注 1 而得；再由 *49a, *16 及 *17a 便得$\vdash \neg\neg A \supset A \sim (\neg\neg A \sim A)$. *51a 由 *51 的证明删去步骤 6 而得. *51b. 由应用 *12 两次于 *49c 再用 *51a 而得. *58d 由 *63 而得. *60f 由 *25 而得.

在整个表达式 C 中把表达式 A 与 B 互换是指在 C 中把 A 的所有出现替换[2]以 B 而把 B 的所有出现替换以 A（例子见后）.

定理8° 设 D 为一个命题字母公式，由不同的命题字母 $P_1, \cdots, P_m$ 及它们的否定 $\neg P_1, \cdots, \neg P_m$ 只用运算子 &, ∨ 而构成. 那末与 D 的否定 ¬D 相等价的公式 $D^\dagger$ 可用下法作出：在 D 中把 & 与 ∨ 互换，把每个字母与它的否定互换.

换句话说，如果 D 为这样的一个命题字母公式，$D^\dagger$ 是由 D 依照上述方法而互换的结果，那末$\vdash \neg D \sim D^\dagger$.

例1° 取$\neg \boldsymbol{A} \& (\neg \boldsymbol{B} \vee \boldsymbol{B})$作为 D，则 ¬D 等价于 $\boldsymbol{A} \vee (\boldsymbol{B} \& \neg \boldsymbol{B})$.

证明本质上是这样的：根据 *62 及 *63，¬D 的 ¬ 号可以逐步地深入，任何双重否定可以应用 *49° 而除去，这样做后 ¬D[3]便被变成 $D^\dagger$ 了.

例1°（续完）

$$\vdash \neg(\neg \boldsymbol{A} \& (\neg \boldsymbol{B} \vee \boldsymbol{B})) \sim$$
$$\neg\neg \boldsymbol{A} \vee \neg(\neg \boldsymbol{B} \vee \boldsymbol{B}) \sim$$

---

1) 本书这里所列的全是 *49a 以后的所谓“补充结果”，大概作者认为以前各定理的证明可用前段（古典系统内的证明处）所列的证明，但这是不对的，例如前段内便说，对*32，*34，*36，*38，*40，*53 的证明可使用对偶原则，而直觉主义者并不承认对偶原则. 因此读者必须把 *31—*63 中没有“°”号的各形式定理重新给出直觉主义的证明——译者注.

2) 即 §26 意义下的替换——俄译注.

3) 原文作“D”，今改正——译者注.

$$\neg\neg \boldsymbol{A} \vee (\neg\neg \boldsymbol{B} \& \neg \boldsymbol{B}) \sim$$
$$\boldsymbol{A} \vee (\boldsymbol{B} \& \neg \boldsymbol{B}).$$

为了更明显地作出证明，我们就 & 与 ∨ 在 D 中出现的个数而归纳(串值归纳)；并把这个数叫做 D 的级 (grade)。

奠基: D是 0 级时. 有某个命题字母 P 使 D 或是 P 或是 ¬P. **情形 1**: D 为 P. 那末 $\vdash \neg D \sim \neg P$[穷举假设]$\sim P^{\dagger}$ [†的定义]$\sim D^{\dagger}$[穷举假设]. **情形2**: D为¬P. 仿上证明但再用 *49°. **归纳推步**: D是 $g+1$ 级时. 那末有两个这种类型的命题字母公式 A 及 B，级数$\leqslant g$，使得 D 或为 A&B 或为 A∨B. **情形 1**: D是 A&B. 则 $\vdash \neg D \sim \neg(A\&B)$ [穷举假设] $\sim \neg A \vee \neg B$[*62] $\sim A^{\dagger} \vee B^{\dagger}$ [归纳假设]$\sim (A\&B)^{\dagger}$ [†的定义]$\sim D^{\dagger}$ [穷举假设]. **情形2**: D是 A∨B. 仿上证明.

例2° 在例 1 的结果中根据代入规则(§25 定理 3) 把 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 分别代以 $\boldsymbol{B}$, $\neg \boldsymbol{A} \vee \boldsymbol{C}$, 可得

$\vdash \neg(\neg \boldsymbol{B} \& (\neg[\neg \boldsymbol{A} \vee \boldsymbol{C}] \vee [\neg \boldsymbol{A} \vee \boldsymbol{C}])) \sim \boldsymbol{B} \vee ([\neg \boldsymbol{A} \vee \boldsymbol{C}) \& \neg[\neg \boldsymbol{A} \vee \boldsymbol{C}])$. 的确，对任何公式 A，B 均有

$$\vdash \neg(\neg A \& (\neg B \vee B)) \sim A \vee (B \& \neg B).$$

正如这例子所说的，在定理 8 的叙述中，可把命题字母 $P_1, \cdots, P_m$ 代以任何公式 $A_1, \cdots, A_m$，只须在D的构成过程中，$A_1, \cdots, A_m$ 永远同一不变并且在互换运算中亦不受到改变便成。(定理 8 的另一说法.)

系° 如果两个字母公式 E 与 F 是属于定理 8 中所述的类型的，那末当把 E 与 F 中的 & 与 ∨ 通通互换时，其等价关系仍然照旧.

换句话说，设 E 与 F 为两个这样的命题字母公式，而由 E 与 F 经过上述的互换后，结果分别得 E′ 及 F′，那么，就有：如果 $\vdash E \sim F$，则 $\vdash E' \sim F'$. (对偶原则.)

例 3° 由 *52 有，$\vdash \boldsymbol{A} \& (\boldsymbol{B} \vee \neg \boldsymbol{B}) \sim \boldsymbol{A}$. 故(把 $\boldsymbol{A} \& (\boldsymbol{B} \vee \neg \boldsymbol{B})$ 作为 E，把 $\boldsymbol{A}$ 作为 F)有 $\vdash \boldsymbol{A} \vee (\boldsymbol{B} \& \neg \boldsymbol{B}) \sim \boldsymbol{A}$.

证明 由题设 $\vdash E \sim F$. 今在 E 与 F 中把每个命题字母 P 都

代以该字母的否定¬P，这种代入运算将以“*”表之．根据代入规则(§25，定理3)得⊢$E^{*}\sim F^{*}$．其次我们在E^{*}及F^{*}中把每个双否定的字母¬¬P替换以简单的字母P，这运算将记为“≠”．由双否定律(*49)以及等价关系的替换性(定理6系)我们有⊢$E^{*\dagger}\sim F^{*\dagger}$．这两运算的结果是在这给定的等价式中把一命题字母与其否定互换．根据定理6（或*30）有⊢¬$E^{*\dagger}\sim$¬$F^{*\dagger}$．根据定理8而把否定式作出来便得⊢$E^{*\dagger\dagger}\sim F^{*\dagger\dagger}$．这最后两步骤是把&与∨互换，并把一命题字母与其否定第二次互换因而便恢复命题字母原形．这样我们最后便得⊢$E'\sim F'$．

例 3°(续完)

⊢$E\sim F$.	⊢ ***A***&(***B***∨ ¬***B***) ~ ***A***.
⊢$E^{*}\sim F^{*}$.	⊢ ¬***A***&(¬***B***∨¬¬***B***) ~ ¬***A***.
⊢$E^{*\dagger}\sim F^{*\dagger}$.	⊢ ¬***A***&(¬***B***∨ ***B***) ~ ¬***A***.
⊢¬$E^{*\dagger}\sim$¬$F^{*\dagger}$.	⊢¬(¬***A***&(¬***B***∨ ***B***))~¬¬***A***.
⊢$E^{*\dagger\dagger}\sim F^{*\dagger\dagger}$,	⊢ ***A***∨(***B***& ¬***B***) ~ ***A***.

即⊢$E'\sim F'$.

例 4° 在例3的结果中把***A***，***B***代以任意公式A，B（根据§25定理3)便得⊢A∨(B&¬B) ~ A．这便是*53．

同样地，当A，B，C为简单的命题字母时，依对偶性(定理8系)便可由*31，*33，*35，*37，*39，*54而得*32，*34，*36，*38，*40，*55；当A，B，C为任意公式时，只须再用代入规则(定理3)便成．

例5° 由对偶性(定理8系)得

(a) 如果⊢***A***∨***B*** ~ ***A***，则⊢***A***&***B*** ~ ***A***．

但我们不能推得：

(b)“对任意公式A与B，如果⊢A∨B ~ A，则⊢A&B ~ A”．(的确，在(b)中如果把A，B取作***A***，***B***&¬***B***，则“⊢A∨B ~ A”变成“⊢***A***∨(***B***&¬***B***) ~ ***A***”，根据*53，它是真的；但“⊢A&B ~ A”却变成“⊢***A***&***B***&¬***B*** ~ ***A***”，它是假的，将在§28例4中证之．)试说明其故．（这里与例2及例4有何不同？）——要取得该系的第

二说法，我们必须要求 $A_1, \cdots, A_m$ 为不同的素公式(参见定理 3 及4). ——因为(b)为假的，故由定理 3，下式亦假:

(c) "$\boldsymbol{A} \vee \boldsymbol{B} \sim \boldsymbol{A} \vdash \boldsymbol{A} \& \boldsymbol{B} \sim \boldsymbol{A}$".

因此对偶原则只是辅助推演规则而不是直接规则.

逻辑中的对偶性的发现可追溯到施累德[1877].

如果采用 §17 的约定，即 & 秩前于 $\vee$，而把括号省去，则在应用对偶原则于一公式时，必须注意指明各运算子的辖域以免结果更改.(因此，我们常常宁可在 & 与 $\vee$ 之间不采用上述约定.)

作为练习，读者可重新检查上述证明而核验本系的下列补充部分.

系(第二部分)° 又：如果$\vdash E \supset F$，则$\vdash F' \supset E'$.(对偶逆[1]关系.)

例 6° 公理 $\boldsymbol{A} \& \boldsymbol{B} \supset \boldsymbol{A}$ 以下公理 $\boldsymbol{A} \supset \boldsymbol{A} \vee \boldsymbol{B}$ 为其对偶逆. 可证公式 $\boldsymbol{A} \& \boldsymbol{B} \supset \boldsymbol{A} \vee \boldsymbol{B}$ 以自己为对偶逆.

§ 28. 赋值，无矛盾性

自从建立了形式体系以及在本章中建立了子体系以来，我们的元数学的探讨工作主要集中于确立一些公式的可证性，或由一些公式到另一公式的可推演性，即在形式体系之内发展逻辑和数学. 这是我们的规划中一个必要的部分，用以表明该形式体系的确可以作为数学中某些部分的形式体系化.

但在元数学中还有一些问题是有关于整个形式体系的. 这些问题之一是一体系的无矛盾性问题，它是希尔伯特规划(§14)中的一个基本问题.

一命题演算(一般地，任何具有否定符号$\neg$的系统)叫做(简单)无矛盾的，如果在这系统之内没有任何公式 A 使得 A 与$\neg$A 均可证；反之，它叫做(简单)矛盾的，如果有一公式 A 使得既$\vdash$A 又

1) 原文为 dual-converse. 意指 EF 次序与 F'E' 次序颠倒，并非对偶关系的颠倒. 暂译"对偶逆".

$\vdash \neg A$.

这是一个严格的元数学定义. 它只用到符号$\neg$,用到公式和可证公式的定义,因此,一个已给形式系统的无矛盾性的证明,便变成一个纯粹数学问题,可以在元数学内加以讨论.

无矛盾性问题及其定义必须在元数学以外,把形式系统解释为某个非形式理论的形式体系化,而以符号$\neg$表示否定时,才能看出其重要性. 当数论公式A不含自由变元时,由两公式A与$\neg A$所表示的命题(如果A含有自由变元,则这些变元的每一组特殊值所表示的命题)合起来便形成矛盾. 同样,如果把命题字母解释为任何特殊的命题,则就命题字母公式言亦有同样结果. 所以,对一形式体系所作的无矛盾性的元数学的证明,便保证了在相应的非形式理论内不致于产生矛盾.

对命题演算言(一般地,对任何形式体系言,只要它把&消及弱$\neg$消作为公设或导出规则),上述的定义与下述的定义一致. 该系统内如果有某个不可证公式,它便是(简单)无矛盾的;如果每个公式都可证,它便是(简单)矛盾的. 因为,如果既有$\vdash A$及$\vdash \neg A$,应用弱$\neg$消(§23),可对每个公式B而得$\vdash B$.对无矛盾的情形言,$A \& \neg A$便是一个不可证公式的例子,否则由&消便得$\vdash A$及$\vdash \neg A$.

由无矛盾性的定义(前一说法的)及可证公式的定义(例如,第一说法的,见§19),使我们得到一个提示以定出如何处理无矛盾性的证明问题的计划(并非唯一的可能计划). 假设我们能够在一些公式中找出一个元数学性质,使得(a)公理具有这个性质,(b)应用推论规则时,如果前提具有该性质则结论也具该性质,(c)具A形及$\neg A$形的两公式不能都具有这性质. 那末由(a)(b)可知,每个可证公式都有这性质,由(c)这系统便是无矛盾的了. 在本节内我们便遵照这个计划而对命题演算的无矛盾性作一个元数学的证明.

所用的有关于公式的性质乃由命题演算的逻辑解释而暗示出来的. 我们把每个命题字母都理解为一变元,以命题作为其值,而这些命题的每一个我们又理解为必是或真或假的. 使用演算中的

运算子⊃ &，∨，¬后可由这些命题而作出别的命题，其真假性只依赖于命题的组成部分的真假性，且依下文各表而定.（因此演算中的运算子有时便叫做‘命题的真值函数’.）显然，所有可证的命题字母公式全是永真的，其意为：当公式中的命题字母取任意真假命题作为其值时，这些公式都表示真命题.

要利用这种观念来对演算的无矛盾性作元数学的证明，我们必须避免引用‘命题’‘真’‘假’，这些都是具有元数学以外的内涵的. 这一点是能够避免的，因为在上面的论证中，基本上并不依赖于命题字母必须取命题以为值，亦不依赖于真与假的特性，除却真与假命题必须彼此不同以外.

为了强调我们下面所做的是具纯数学性质的，可举正整数的初等算术来作比喻. 尽管在该算术中数1,2,3,…是想具有一个计数或量度的意义的，但就加法表及乘法表而论，它们都可以是一些相异客体的任一个枚举. 从这个观点说来，算术是讨论客体域{1，2，3，…}上所定义的运算即函数+及·的，因此只要求可以认出这些客体及区别它们便够，与这些客体的内在本性无关.

我们今作出一个具有同样意义的算术，其客体域只有两个客体但却有四个函数 ⊃，&，∨，¬. 这已经简单地把我们要做的事说出来了. 就元数学而言，⊃，&，∨，¬不过是一些无意义的客体，所以若要更明确些说出我们将要做什么便只能如下说法. 我们引入一个元数学的计算过程（叫做赋值过程），使得对于每一个符号⊃，&，∨，¬都有该算术中一个函数（或该函数的表，叫做真值表）来对应，因而对于每一个命题字母公式也有一个这样的函数（或表）来对应. 然后我们根据相应的函数（或表）而研究命题字母公式的元数学性质.

因为在该抽象算术中，除要求这两客体（真值）彼此不同以外我们别无要求，所以这两客体的名称是毫无关系的. 我们可把它们指定为“0”与“1”，“+”与“−”，“↑”与“↓”，或 t 与 f 等等. 我们选用最后这对符号，它们分别暗示逻辑解释中“真”与“假”这两概念.（译者按，在英文里，“真”为 true，“假”为 false.）

首先,我们把命题字母考虑为以域{t,f}为变域的变元.

其次,我们把演算的运算子当作定义于这域上的函数,并依照下列各表而定义,这些表和正整数算术中加法表与乘法表相类似.根据这些表,对自变元的任何值都可以读出函数的相应值.

$A \supset B$

A \ B	t	f
t	t	f
f	t	t

$A \,\&\, B$

A \ B	t	f
t	t	f
f	f	f

$A \vee B$

A \ B	t	f
t	t	t
f	t	f

$\neg A$

A	
t	f
f	t

(如果把两客体写作"0"与"1",则$\neg$表与$\vee$表与§10 例 4 中的′表与·表全同.)

于是由不同的命题字母 $P_1, \cdots, P_m$ 所组成的每个命题字母公式A都表示一个定义于域{t,f}上的函数,而以这些字母为自变元.对这些字母的每个m元序组的值而言,函数的相应值都可以依次应用基本表而计算出来.

例 1 字母公式 $A \sim B$, 即$(A \supset B) \,\&\, (B \supset A)$(§26) 表示一函数,可由下表确定.

$A \sim B$

A \ B	t	f
t	t	f
f	f	t

右上角的值可如下计算.

$$(A \supset B) \,\&\, (B \supset A)$$
$$(t \supset f) \,\&\, (f \supset t)$$
$$f \quad \& \quad t$$
$$f$$

只有当二变元时这表才可写成正方形(这样它可帮助提示函数的性质). 一般说来,对m个变元 $P_1, \cdots, P_m$ 言,我们可把 2^m 个可能的变目的m元序组垂直地由上而下,依照一个固定的次序而列出,然后把相应的函数值写入右旁的值行去.

例 2

A	B	C	$\neg[A \vee B \supset (B \& C) \vee \neg A]$
t	t	t	f
t	t	f	t
t	f	t	t
t	f	f	t
f	t	t	f
f	t	f	f
f	f	t	f
f	f	f	f

一个由不同的命题字母 $P_1, \cdots, P_m$ 所组成的命题字母公式E,如果它的表中的值列只出现 t，它便叫做永真的；如果只出现 f 它便叫做永假的. 两个由 $P_1, \cdots, P_m$ 所组成的命题字母公式 E 与 F，如果它们的表的值列是相同的，它们便叫做永等的[1]. (换句话说，永真的 E 表示一个常函数 t，永假的 E 表示一个常函数 f，永等的 E 与 F 表示同一的函数.)

当把 E(E 及 F)看作是由明指的一列不同的命题字母 $P_1, \cdots, P_m$ 所组成的命题字母公式，而这些字母不必（依照 §25）全都出现于公式中时，上定义仍适用. 今先设尽可能最少的字母表为 $P_1, \cdots, P_m$，即在E（或 E 与 F）中恰巧只含有不同的命题字母 $P_1, \cdots, P_m$. 如果我们再加入其它的字母，则该公式的真值表中每行便将分裂成好几行(如果加入 k 个新字母则每行分裂成 2^k 行)，用以表示这些新增字母的值的可能分布，但并不影响计算过程也不影响函数的对应值. 因此如果对尽可能最少的字母表言它为永真或永假(永等)，则对其它的字母表亦然，逆理亦真. 因此以后不必提到所用的字母表.

定理 9 在命题演算中一个命题字母公式 E 是可证的（或可由永真公式 Γ 而推演出的)，其必要条件是：它是永真的；即如果

1) 原文为 identically equal. 我们用“恒等”以译 identical——译者注.

$\vdash$ E 则 E 是永真的.

就关于 E 的证明的长度而作串值归纳,并利用下述两引理.

引理 12a 一命题字母公式如为一公理,则它是永真的.

证明 对命题演算中十个公理模式言(§19 公设 1a, 1b, 3—8, 如讨论直觉主义系统则以 §23, 8^I 代替 8),我们容易由计算核验下列的事实:若对在模式中所出现的 A, B, C 按任何可能的方法直接指派以值 t, f, 则相应的真值表中的值列只出现 t. 这样我们便在下列的情况下核验了本引理 3: 即当模式中的 A, B, C 为简单的命题字母 ***A***, ***B***, ***C*** 时.

引理的真确性便可如下证得. 试考虑任一公理,它是一个命题字母公式的. 这必来自某一个公理模式,不过把其中的 A, B, C 取作某些命题字母公式罢了. 设这些命题字母公式由不同命题字母 $P_1, \cdots, P_m$ 所组成. 今试把 t, f 的任何 m 元序组指派作 $P_1, \cdots, P_m$ 的值,则由它所给出的 A, B, C 的值必然使整个公理取得值 t(如上文已核验过的).

引理 12b 在应用推论规则时,如果其前提是永真的命题字母公式,则结论亦然.

证明 由下列的真值表可以看见,对命题演算的推论规则(公设 2)而言,A, B 的各对值中能够使两个前提 A 及 A$\supset$B 都取得值 t 的,只能是 tt;而这对值的确使得结论 B 获得值 t.

A	B	A	A$\supset$B	B
t	t	t	t	t
t	f	t	f	f
f	t	f	t	t
f	f	f	t	f

因此,设 A 与 B 是由 $P_1, \cdots, P_m$ 所组成的命题字母公式,则 $P_1, \cdots, P_m$ 的值的任何 m 元序组,只要它对两前提给出值 t,一定也对结论给出值 t. 根据假设,对 $P_1, \cdots, P_m$ 的值的任何 m 元序组,两前提均取得值 t. 故结论亦然.

例 3 在命题演算中，公式$\neg[A \vee B \supset (B \& C) \vee \neg A]$是不可证的，因为在它的真值表的值列中有 f 出现(例 2). 同样，$A \vee (\neg A \& B)$亦不可证，因为当 A, B 取值 f, f 时，它取值 f.

系 1 两命题字母公式 E 与 F 彼此等价的必要条件是: E 与 F 永等；即如果$\vdash E \sim F$，则 E 与 F 永等.

证明 如果 E 等价于 F，则由等价性的定义 $E \sim F$ 是可证的. 故由定理 9，可知 $E \sim F$ 为永真. 参照～的表(例 1)可见 $E \sim F$ 之取得值 t，只当 E 与 F 同取值 t 或同取值 f 时，即只当它们取同样的值时. 因为 $E \sim F$ 是永真的，即永远取得值 t 的，故 E 与 F 永远取同样的值，即它们是永等的.

例 4 $A \& B \& \neg B$ 与 A 不是等价的，因为当 A, B 取值 t, t 时，它们取不同的值(分别取得值 f 与 t).

系 2 命题演算是（简单）无矛盾的；即没有公式 A 使得既$\vdash A$又$\vdash \neg A$.

证明 若用简单无矛盾性的第二个定义（见上），这已由例 3 证明了.

若想就原来的定义直接证明，可设公式 A 与$\neg$A 有一个是可证的. 则依定理 9 它必是永真的；再由$\neg$的真值表可知，另一公式必是永假的，故非永真，依定理它是不可证的.

这样，对命题演算的用命题字母公式而定义的无矛盾性得证了. 如果在其它意义的公式的演算中 A^* 与$\neg A^*$是可证公式，那末根据逆代入规则(§25 定理 4)，亦将会有两可证命题字母公式 A 与$\neg$A，因此亦可以推广到用其它意义的公式的无矛盾性了.

当然，如果加入另一群公设，即使该群公设本身是无矛盾的，但这个无矛盾性证明亦不再有效了.

命题演算的无矛盾性证明首先由坡斯特（Post)[1921] 给出.（参见卢卡西维支(łukasiewicz)[1925]，希尔伯特-阿克曼[1928].)

在本节所作的无矛盾性的证明中，我们用到两个客体的域上的算术，在下列意义之下，这算术可理解为该演算的一个解释. 由真值表而对演算中的运算子给以一个算术上的意义. 命题字母则

理解为算术中的自变元，以域{t, f}为变域. 每个命题字母公式都可解释为下列命题：对该公式中各个自变元的一切可能选取的值该公式都取得值 t. 依定理 9 可知，只有在这个解释之下为真的那些公式才是可证的. 因为在这解释之下，一公式所表示的命题便等价于下列命题：该公式具有(上文根据 t 与 f 的计算过程而定义的)永真性这个元数学的特性.

另一方面，在(通常的)逻辑解释之下，命题字母却被当作以某命题域为变域的自变元. 命题字母公式便表示下列的全称命题：它的变元在变域中取各种命题以为值时所得出的所有特殊命题都是真的. 若把(该域中的)各特殊命题与两客体 t, f 之间建立多一对应，使真命题对应于 t，而假命题对应于 f，那末这个逻辑解释与上述的算术解释便可以相应了. 在这个解释之下，一公式所表示的命题不等价于该公式的可以元数学地定义的某一性质，除非对容许作为命题字母之值的命题域作出特殊的限制.

§ 29. 完备性，范式

在元数学中可以考虑的另一个问题是一个形式系统的"完备性". 例如，就命题演算言，我们已经给出了十一个公设(§19). 我们能不能够说出理由，为什么只给这么多? 如果我们试图发现一些新公设，以便加到这表去以得出更多的可证公式，是不是更好呢? 要解答这些问题，我们首先必须给出一个准则来决定究竟我们要在这系统内证明一些什么东西. 由于所选择的准则不同，我们便得出不同的完备性概念.

我们可以用肯定的形式来给出一个准则，说，如果公设表已经足够某种目的的需要，那末这系统便是完备的. 例如，如果已经对系统中的公式定义了某种性质；或虽未定有性质，但已对这系统中的公式作了某种解释，这时便可考虑下性质：在这解释之下公式将表示一个真命题. 就这种性质或这种解释而言，无矛盾性以及完备性都可如下地给出.

如果只有具该性质的(或只有在该解释之下表示真命题的)公式才是可证的，那末就该性质(或该解释)而言，这系统是无矛盾的. 如果所有具该性质的(或所有在该解释之下表示真命题的)公式都是可证的，那末就该性质(或该解释)而言，这系统是完备的.

与前节的简单无矛盾性的概念不同，这里所说的就某一性质或某一解释而言的无矛盾性及完备性未必属于元数学. 到底属于元数学与否，须逐个情况考虑，视该性质(或解释)是否可在元数学内表述而定.

对命题演算而言，我们有永真这个性质(也可以说，有把演算当作两客体的域上的算术这种解释)，它是可在元数学内表述的. 因此定理 9 便是就字母公式的某种性质(或演算的某种解释)而言的元数学的无矛盾性定理.

今把就一解释而言的完备性这个观念扼要重述如下：在一解释之下一系统是完备的，如果凡由它的形成规则所能表示的一切真命题，在这系统内均能由它的推演公设(或变形规则)而证出.

如果把要证出什么公式这个准则用否定形式来给出，我们便得到完备性的另一个表述. 我们说一系统是完备的，如果该公设能够给出我们所要的一切，过多将会出现不期望的结果. 可以想到的一个(不期望的)结果是简单矛盾性. 如果要避免的结果能够元数学地描述(例如简单矛盾性)，那末所得到的完备性概念总是元数学的. 就各个特殊的形式体系来说，当我们讨论到它们时，我们将给出更精确的表述.

注意，无矛盾性定理经常是这样的一个定理，至多这样这样的公式是可证的；而完备性定理经常是这样的定理，至少所有这样这样的公式是可证的.

对完备性问题作了一般的讨论以后，现在转而讨论命题演算的完备性问题. 我们先证(定理 10)这演算就永真性而言是完备的.

定理 10° 与系 1° 定理 9 及系 1 的条件亦是充分的(而且是必要的)；即如果 E 是永真的，则$\vdash$E，又如果 E 与 F 是永等的，则$\vdash$E $\sim$ F.

证明可根据两条引理而得．设 $P_1, \cdots, P_m$ 为不同的命题字母．设给出一个 t,f 的 m 元序组作为 $P_1, \cdots, P_m$ 的值，并按对 P_j 所给的值为 t 或 f 而令 Q_j 为 P_j 或 $\neg P_j$，$(j = 1, \cdots, m)$ 则序列 $Q_1, \cdots, Q_m$ 就叫做相应的字母 m 元序组．

例 1 设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$ 分别取值 t, f, t，则相应的字母 m 元序组为 $\boldsymbol{A}, \neg\boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$.

引理 13 设 E 为由不同的命题字母 $P_1, \cdots, P_m$ 所组成的命题字母公式；设给出一个 t 与 f 的 m 元序组作为 $P_1, \cdots, P_m$ 的值；并设 $Q_1, \cdots, Q_m$ 为相应的字母 m 元序组．则有 $Q_1, \cdots, Q_m \vdash E$ 或 $Q_1, \cdots, Q_m \vdash \neg E$ 视所给的值 m 元序组使 E 取值 t 或 f 而定．

例 2 相应于 §28 例 2 中对 $\neg[\boldsymbol{A} \vee \boldsymbol{B} \supset (\boldsymbol{B} \& \boldsymbol{C}) \vee \neg \boldsymbol{A}]$ 所作的表，我们可以有下列八个推演式：

$$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C} \vdash \neg\neg[\boldsymbol{A} \vee \boldsymbol{B} \supset (\boldsymbol{B} \& \boldsymbol{C}) \vee \neg \boldsymbol{A}].$$
$$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \neg\boldsymbol{C} \vdash \neg[\boldsymbol{A} \vee \boldsymbol{B} \supset (\boldsymbol{B} \& \boldsymbol{C}) \vee \neg \boldsymbol{A}].$$
$$\boldsymbol{A}, \neg\boldsymbol{B}, \boldsymbol{C} \vdash \neg[\boldsymbol{A} \vee \boldsymbol{B} \supset (\boldsymbol{B} \& \boldsymbol{C}) \vee \neg \boldsymbol{A}].$$
$$\boldsymbol{A}, \neg\boldsymbol{B}, \neg\boldsymbol{C} \vdash \neg[\boldsymbol{A} \vee \boldsymbol{B} \supset (\boldsymbol{B} \& \boldsymbol{C}) \vee \neg \boldsymbol{A}].$$
$$\neg\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C} \vdash \neg\neg[\boldsymbol{A} \vee \boldsymbol{B} \supset (\boldsymbol{B} \& \boldsymbol{C}) \vee \neg \boldsymbol{A}].$$
$$\neg\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \neg\boldsymbol{C} \vdash \neg\neg[\boldsymbol{A} \vee \boldsymbol{B} \supset (\boldsymbol{B} \& \boldsymbol{C}) \vee \neg \boldsymbol{A}].$$
$$\neg\boldsymbol{A}, \neg\boldsymbol{B}, \boldsymbol{C} \vdash \neg\neg[\boldsymbol{A} \vee \boldsymbol{B} \supset (\boldsymbol{B} \& \boldsymbol{C}) \vee \neg \boldsymbol{A}].$$
$$\neg\boldsymbol{A}, \neg\boldsymbol{B}, \neg\boldsymbol{C} \vdash \neg\neg[\boldsymbol{A} \vee \boldsymbol{B} \supset (\boldsymbol{B} \& \boldsymbol{C}) \vee \neg \boldsymbol{A}].$$

引理 13 的证明 就 E 中逻辑符号的（出现）个数而作串值归纳；设把该个数叫做次数[1](degree)．

奠基：E 为 0 次．这时有 j 使 E 为 P_j．在所给的值 m 元序组中，P_j 的值为 t 或 f．**情形 1**：P_j 的值为 t．则 Q_j 为 P_j，即 Q_j 为 E；故由 $\vdash$ 的一般性质有：$Q_1, \cdots, Q_m \vdash E$，因在这情形 E 取值 t，故已得证．**情形 2**：P_j 的值为 f．同样，Q_j 为 $\neg E$，故 $Q_1, \cdots, Q_m \vdash \neg E$，亦得证．

1)原书在 §78 处又叫做级 (grade)，而在 §27 处 grade 又只指 & 与 V 的出现个数，不够一致——译者注．

归纳推步：E为$d+1$次．这时有两个由$P_1,\cdots,P_m$组成的命题字母公式A与B，次数均$\leqslant d$，使得E为$A\supset B$或$A\& B$或$A\vee B$或$\neg A$．**情形1**：E为$A\supset B$．就$P_1,\cdots,P_m$而给的值m元序组视公式A，B分别取值t,t或t,f或f,t或f,f而分为四个子情形．**子情形2**：A，B取值t，f．这时（由$\supset$表中右上格）E取值f，故我们须证$Q_1,\cdots,Q_m\vdash\neg E$．根据归纳假设我们有$Q_1,\cdots,Q_m\vdash A$及$Q_1,\cdots,Q_m\vdash\neg B$．由*41或*44有$A,\neg B\vdash\neg(A\supset B)$，即$A,\neg B\vdash\neg E$．故得$Q_1,\cdots,Q_m\vdash\neg E$，这便是所要证明的．其它各情形及各子情形的处理均仿此，但用*41—*48，*49a.

引理14 设E为由不同命题字母$P_1,\cdots,P_m$所组成的命题字母公式．如果对每一个（共2^m个）t，f的m元序组言都有$Q_1,\cdots,Q_m\vdash E$，其中$Q_1,\cdots,Q_m$为相应的字母m元序组，则必有$P_1\vee\neg P_1,\cdots,P_m\vee\neg P_m\vdash E$.

引理14的证明 应用$\vee$消共$2^{m-1}+2^{m-2}+\cdots+1$次便得．例如当$m=2$时，由假设得

(a)
$$\begin{cases} P_1,\ P_2\vdash E \\ P_1,\neg P_2\vdash E \\ \neg P_1,\ P_2\vdash E \\ \neg P_1,\neg P_2\vdash E \end{cases}$$

应用$\vee$消两次可得

(b)
$$\begin{cases} P_1,\ P_2\vee\neg P_2\vdash E \\ \neg P_1,\ P_2\vee\neg P_2\vdash E \end{cases}$$

再应用一次$\vee$消得

(c)
$$P_1\vee\neg P_1,\ P_2\vee\neg P_2\vdash E,$$

这便是所要证明的.

定理10的证明 设E为由$P_1,\cdots,P_m$组成的命题字母公式．依假设，E为永真的，即当把t与f的每个m元序组作为$P_1,\cdots,P_m$的值时它均取值t．故由引理13，可知引理14的假设是满足的；故由引理14得$P_1\vee\neg P_1,\cdots,P_m\vee\neg P_m\vdash E$．再由*51得

$\vdash$E.

附注 1 除最后一步骤外，这证明的各步骤对直觉主义系统均适用．故在直觉主义系统中，对任何一个由 $P_1, \cdots, P_m$ 组成的字母公式E言，均有：

(a) $P_1 \vee \neg P_1, \cdots, P_m \vee \neg P_m \vdash$E，如果E是永真的．

(b) $P_1 \vee \neg P_1, \cdots, P_m \vee \neg P_m \vdash E \vee \neg E$．

这定理表明了，要建立在上述的算术解释之下为永真的那些字母公式，命题演算的推演规则是完备的；而系1则说，对于可在上述的算术中定义的函数而言，这个推演理论完备地确定了其相等性．

系2° 在命题演算的公设表上如果加入一个不可证的字母公式作为公理模式，结果便将破坏了简单无矛盾性．

证明 依定理10，对该字母公式中的命题字母的某组值言该公式必取值f．试选取这一组值并根据这条新公理模式而作代入，对取值t的字母我们代以 $\boldsymbol{A} \vee \neg \boldsymbol{A}$，对取值f的字母我们代以 $\boldsymbol{A} \& \neg \boldsymbol{A}$．这样，结果所得的新公理便是永假的了．因为 $\boldsymbol{A} \& \neg \boldsymbol{A}$ 亦是永假的，根据系1两者等价．故知（用 *18a）$\boldsymbol{A} \& \neg \boldsymbol{A}$ 亦是可证的，而这系统便是矛盾的了（§28）．

系2说，在命题演算中不能够加入与公设表中原有公设具有同样特征的新公设（按即以命题字母公式作为公理模式这个特征——译者），否则便会破坏简单无矛盾性．这是上面所提到的第二类型的完备性[1]．

设给出t，f的m元序组作为 $P_1, \cdots, P_m$ 的值，又设 $Q_1, \cdots,$

---

1) 但下问题仍未解决：在命题演算中有没有一个不可证命题公式，把它作为公理（不是作为公理模式）加到这个演算去后仍不致发生矛盾？可以证明，把命题公式A作为公理而加到命题演算去，它之破坏简单无矛盾性当且仅当A为永假公式时（例如，可把公式 $\boldsymbol{A}$ 加到命题演算而不致于发生矛盾．的确，如果A永假，则由定理10系1有 $\vdash A \sim A \& \neg A$；故加入A后由 *18a 得 $\vdash A \& \neg A$，因而（由&消）得 $\vdash A, \vdash \neg A$ 即矛盾．反之，如果加入A后引起矛盾，即有公式B使得 $A \vdash B$ 及 $A \vdash \neg B$，则（¬引）$\vdash \neg A$，即（定理9）¬A永真因而A永假．其次容易证明，在命题演算中，把命题 $A_1, \cdots, A_n$ 作为公理同时加到命题演算去，它破坏简单无矛盾性当且仅当 $A_1 \& \cdots \& A_n$ 为永假时——俄译注．

Q_m 为相应的字母 m 元序组，则 $Q_1\&\cdots\&Q_m$($Q_1^\dagger\vee\cdots\vee Q_m^\dagger$ §27) 叫做相应的初等合取式(析取式).

例 1(续完) 相应的初等合取式 (析取式) 是 $\boldsymbol{A}\&\neg\boldsymbol{B}\&\boldsymbol{C}$ ($\neg\boldsymbol{A}\vee\boldsymbol{B}\vee\neg\boldsymbol{C}$).

定理 11° 由不同命题字母 $P_1,\cdots,P_m$ 所组成的命题字母公式 E 必等价于一公式F(叫做 E 的主要析取范式)，它具有下列两形之一. 设以 t,f 的 m 元序组作为 $P_1,\cdots,P_m$ 的值时，E 取值 t,则 F 便是这些相应的初等合取式的析取(依某种次序). 如果 E 是永假的，则 F 为 $P_1\&\neg P_1$. (对偶地，E 亦有一个主要合取范式 G，把上文的 $\vee$ 与 &，t 与 f 互换便得；$\vdash$E～G.)

例 2(续)° $\neg[\boldsymbol{A}\vee\boldsymbol{B}\supset(\boldsymbol{B}\&\boldsymbol{C})\vee\neg\boldsymbol{A}]$ 有一个主析范式为 $(\boldsymbol{A}\&\boldsymbol{B}\&\neg\boldsymbol{C})\vee(\boldsymbol{A}\&\neg\boldsymbol{B}\&\boldsymbol{C})\vee(\boldsymbol{A}\&\neg\boldsymbol{B}\&\neg\boldsymbol{C})$，又有一个主合范式为 $\neg\boldsymbol{A}\vee\neg\boldsymbol{B}\vee\neg\boldsymbol{C}\&\boldsymbol{A}\vee\neg\boldsymbol{B}\vee\neg\boldsymbol{C}\&\boldsymbol{A}\vee\neg\boldsymbol{B}\vee\boldsymbol{C}\&\boldsymbol{A}\vee\boldsymbol{B}\vee\neg\boldsymbol{C}\&\boldsymbol{A}\vee\boldsymbol{B}\vee\boldsymbol{C}$.

证明 这定理可由定理 10 系 1 得证，因为(由主析范式的特有形状及¬& $\vee$ 的真值表易见) E 与 F 是永等的.

除却上述两种意义的推演完备性(定理 10 及系 2)以外，命题演算还有记号完备性，其意指，对 m 个变元 $P_1,\cdots,P_m$ 的 2^{2^m} 种可能的真值函数，每种都可用由这些字母组成的字母公式来表示. 因为，给出了这函数的真值表后，我们便可以构造一个主析范式 (除却析取项的次序外，它是唯一确定的)来表示这函数.

这三种完备性首先由坡斯特[1921]所得到；定理 10 的目前证法乃由卡尔马(Kalmár)[1934—5]所给出. (本书作者在[1934]年的另一本著作的初稿中，也用到这个方法作为 $\vee$ 消规则的应用.)

希尔伯特与阿克曼 [1928] 在另一种形式下给出坡斯特的证明，其法在于先用 19 世纪符号逻辑学者的化归技巧而建立范式定理. 简单说来是，用 §26 的链方法而把任一字母公式 E 化归成一主析范式(或主合范式)如下. 首先，应用 *58 或 *59 把$\supset$的出现除去. 其次重复施用定理 8 使¬的出现逐次深入. 第三，应用分配律 *35 (及 *33)把所得的结果“乘出”，正如通常代数学那样，不

过把 $\vee$, & 作为 $+$, $\cdot$ 而已(对主合范式则把 $\vee$, & 作为 $\cdot$, $+$ 而用 *36 及 *34). 第四,根据(还根据 *31—*34)幂等律 *37, *38 以及 *52—*55 而实施简化, 使得结果式的析取项(对主合范式言则是合取项)至多只含有每个字母的一次出现, 除非达到主析范式 $P_1 \& \neg P_1$ (主合范式 $P_1 \vee \neg P_1$). 第五, 对非例外情形(按即非 $P_1 \& \neg P_1$ 或非 $P_1 \vee \neg P_1$ 的情形——译者),则各项中未出现的字母可用 *52 及 *35(*53 及 *36)而引入. 第六, 应用 *31—*34, *37, *38,把一项中的字母及否定字母排成正常次序使得这些项都变成初等合取式(初等析取式),而重复的项则删除.

例 2(续完)° 虽然根据我们对定理 11 的证明已经知道 $\neg[\boldsymbol{A} \vee \boldsymbol{B} \supset (\boldsymbol{B} \& \boldsymbol{C}) \vee \neg \boldsymbol{A}]$是等价于

$$(\boldsymbol{A} \& \boldsymbol{B} \& \neg \boldsymbol{C}) \vee (\boldsymbol{A} \& \neg \boldsymbol{B} \& \boldsymbol{C}) \vee (\boldsymbol{A} \& \boldsymbol{B} \& \neg \boldsymbol{C})$$

的, 但读者若用刚才所描述的步骤而把它们彼此互化, 这将是有益的. 第四运算可得出 $(\boldsymbol{A} \& \neg \boldsymbol{B}) \vee (\boldsymbol{A} \& \neg \boldsymbol{C}) \vee (\boldsymbol{B} \& \neg \boldsymbol{C} \& \boldsymbol{A})$. 由这及*40 我们便得一个"析范式"(但非"主析范式")$(\boldsymbol{A} \& \neg \boldsymbol{B}) \vee (\boldsymbol{A} \& \neg \boldsymbol{C})$, 再用 *35 可得到一个更短的等价式(但非析取范式) $\boldsymbol{A} \& (\neg \boldsymbol{B} \vee \neg \boldsymbol{C})$[1].

§ 30. 判定过程,解释

在数学中我们有好些一般问题, 该问题的任何一个特例都可以用一个预先指定的一致方法而解答. 更准确些说, 有无穷多个特殊问题所成的集,又有一个与该集有关的过程,这两者同是预先描述好了的,使得今后不论我们在该集中选取那个特殊问题,都毫无疑问地可以使用该过程, 并因而使我们对该特殊问题得到一个"是"或"否"的解答.

例 1 设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 为具有给定的整系数的多项式. $f(x)$

1) 获得更"短"的等价公式的可能性是一个非常迫切的问题, 尤其因为它与命题演算对继电器线路理论的应用有关——俄译注.

是否 $g(x)$ 的因子？我们可用 $f(x)$ 除 $g(x)$。除法可根据预先指定的方法而一步一步地施行. 在有限个步骤之后过程终止（到底多少个须看我们如何计算步骤个数而定，但可以明确规定如何计算，于是这步骤的个数便依赖于两多项式的次数以及系数的大小）.这时我们便得到剩余. 我们可以认出这剩余为 0 或否. 如为 0，则问题的回答为“是”，如非 0，则问题的回答为“否”.

例 2 如 a, b, c 为给定的整数，问方程 $ax+by=c$ 对 x, y 言有没有整数解？要解答这问题，有一个众所周知的方法，即辗转相除法.

这一种方法，它对一个一般问题的每一个特例都能够给以一个“是”或“否”的解答，可叫做这问题的判定过程，判定方法或判定算法. 如何找出这一种方法的问题可以叫做这问题的判定问题，在近代逻辑中研究这问题的有施累德 [1895]，罗文汉 (Löwenheim)[1915] 与希尔伯特[1918]. 现在所说的不过是导引的性质，在后面我们将对判定方法的内容给一个更精确的定义(§60，§61).就目前来说，我们能够熟识判定过程的一些特别例子也就够了.

仿此，如果问题所要求的不是“是”或“否”的回答而是找出一些客体，那末便有相应于该问题的计算过程或算法(因而便有一个计算问题).

和一个给定的形式体系有关的，例如和我们所研究的体系有关的，亦有一些一般问题，如‘一个给定的表达式是否一公式？’‘一个给定的有限个形式表达式的序列是否一证明？’对此，由系统中的定义可以直接得出其判定方法. 的确，如果这系统的形式化要想达到当初预期的目的，那就非这样(按即直接得出判定方法——译者)不可. 但对于‘一个给定的公式是否可证的’问题，其性质可截然不同了. 要看出其间的差异，试比较‘公式’，‘证明’，‘可证公式’这三个观念的定义. 对这三个定义的每一个来说，要把它应用到某一个特殊的给定客体时，我们都必须通过讨论一系列的客体然后才认出该给定的客体是属于所定义的一类之中的（如果它属于的话），即：必须讨论在构造该给定公式过程中所得到的(部分)

公式，讨论该证明的各段，讨论在该可证公式的证明中的各公式．就公式及证明而言，这一系列的客体是在所给的客体之内的，当我们作考虑时，由所给的客体可以重新得到．但就可证公式而言，该系列的客体却不在所给的客体之内．因此，对最后这个问题言，如果判定方法存在的话，那末它必不是直接地或几乎直接地应用定义的，因而该问题的判定问题便不是无足重轻的了．它常叫做一形式体系的判定问题[1]．对纯命题演算而言，该问题可借定理 9 与 10(§28，§29)而解决：

定理 12° 在命题演算中要判定一个命题字母公式 E 是否可证的，其判定过程（算法）在于计算 E 所表示的 t,f 函数的真值表．E 可证与否视该表的值列是否只出现 t 而定．

更进一步，这判定过程还可推广至于别种意义的公式，因为可先把该公式中不同的素成份同时分别代以不同的命题字母以得到相应的字母公式(§25，定理 3,4)．根据等价性定义(§26)，等价性的判定过程可包括于可证性的判定过程之内，或者根据系 1 亦可类似地得一判定过程．可推演性的判定过程亦可化归于可证性的判定过程之内，因为根据⊃与 & 的导出规则(§23 定理 2)，在命题演算内，$D_1, \cdots, D_l \vdash E$ 当且仅当 $\vdash D_1 \& \cdots \& D_l \supset E$．（另一组的判定过程是化归到主析范式的过程，见 §29 末．）

解释 我们的元数学结果，即命题演算可以容许一个算术的解释，该算术中只有两个客体 t 及 f，这结果也是通常逻辑解释的一个说明(参见 §28 末)．我们看到，就下列几方面说，我们的命题演算是一个适当的逻辑工具，(1)当各特殊命题是决定地或真或假时，(2)当我们所要发展的理论中有一个假设说，每个命题都是或真或假时．对直觉主义者说来，情况(1)出现于下列场合，在有穷个客体域的数学中，或者虽则我们讨论无穷域中客体的命题，但这些命题却是具有判定过程的（参见 §29 附注 1）．在古典数学中命题演算的使用可以作为情况(2)的一个例子．

1) 原文为 the decision problem，上文所谈的则是 decision problem，两者有别——俄译注．

演算中的运算子作为命题的真值函数时应如何解释，这由真值表可以完全确定了．例如，我们看见∨是可兼的‘或’：当A真或B真或两者同真时 $A \vee B$ 便真．（不可兼的‘或’可如下表示：$(A \vee B)\&\neg(A\&B)$。）

蕴涵式 $A \supset B$ 和 $\neg A \vee B$ 同（§27 *59），并叫做实质蕴涵．$A \supset B$ 之成立并不要求在A与B这两观念之间有必然的联系．例如，月球由绿乳酪组成实质蕴涵 $2+2=5$（因为前提是假的）．费尔马"最后定理"实质蕴涵 $2+2=4$（因为结论是真的）．这曾被一些学者看作怪论（路易斯（Lewis）[1912，1917]）．我们不想深入讨论这个有争论的问题，但给出下列的一些简单附注．当在更大一些的范围内例如在完全数论系统内而考虑时，实质蕴涵的作用可以得到更好的理解．$\forall x(A(x) \supset B(x))$ 表示两个当作变命题（或‘x 的命题函数’）的 $A(x)$ 与 $B(x)$ 之间的一种关系，叫做形式蕴涵．由于实质蕴涵的特性，只要前件为假全式便成立，所以当实质蕴涵与全称性结合而得出形式蕴涵时，便可以容许定理 $\forall x(A(x) \supset B(x))$ 对某些 x 值空虚地（vacuously）成立．这是一种技巧，和把数 0 引进数系中以及把空集引进集合论中同样，都是使得定理的表述可以更为言简意赅．实质蕴涵的另一特性，只要后件真全式亦成立，亦有同样的作用．照通常用语来说，⊃也许更该读为"如果……则……"或读为"只当"．但是对⊃而言"蕴涵"是一个很方便的名称．使用它时，我们遵照数学中普通的惯技，即把从有关技术理论中而来的类似概念给以相同的名称．（例如在数学中有各式各样的"加法"与"乘法"．）在我们的形式体系中，运算子⊃的确有蕴涵的特性，由于它具有推演定理及规则 2(即定理 2 的两个⊃规则）所表示的那两个性质之故．所以它的确表示逻辑后承，但不是由于某种先验（a priori）的意义，而是由于该形式系统的推演公设所确定的意义．

演算的其它形式　由 *56—*61 可见，即使把¬以及⊃，&，∨三个运算子之一作为演算的原始运算子（形式记号），并把其它两者定义为一些缩写记号（例如在 §26 中对～的定义那样），命题演

算(古典的——译者注)的记号完备性(§29 末)仍可得到. 进一步的简化可以化归于唯一的一个原始运算子 | (叫做‘析取否定’或‘舍佛 Sheffer 的竖记号’,[1913*]),它由下表定义:

$\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}$

	$\boldsymbol{B}$	t	f
$\boldsymbol{A}$	t	f	t
	f	t	t

然后把 $\neg\boldsymbol{A}$ 定义为 $\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}$,把 $\boldsymbol{A}\vee\boldsymbol{B}$ 定义为 $(\neg\boldsymbol{A})|(\neg\boldsymbol{B})$[1].

我们本来把代入规则作为辅助推演规则而导出的, §25 定理 3,但在建立命题演算时亦可以把它作为一个直接公设准则:

$$\frac{E}{E^*}.$$

在这情形之下,命题字母便叫做命题变元,而使用元数学变元“A”,“B”,“C”所表示的公理模式便可代以用形式变元 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ 所表的特殊公理. 一般都把直接代入规则理解为每次只对一变元施行(参见 §25 附注 1).

例 3 这时我们就以 $\boldsymbol{A}\supset(\boldsymbol{B}\supset\boldsymbol{A})$ 作为公理 1a. 对任何给定的公式 A 与 B 而想作出 A⊃(B⊃A) 的证明,便可如下进行. 如果 A 不含有 $\boldsymbol{B}$,则先以 A 代 $\boldsymbol{A}$,再以 B 代 $\boldsymbol{B}$. 如果 A 含有 $\boldsymbol{B}$,则命 P 为与 $\boldsymbol{A}$ 不同的命题字母且不出现于 A 中的,然后先以 P 代 $\boldsymbol{B}$,A 代 $\boldsymbol{A}$,B 代 P.

这是建立命题演算时更常用的方法;我们所选用的公理模式法乃由冯纽曼[1927]所给出. 不管那一种方法,推论规则都必须具有模式的特征,必须应用元数学的变元,因为它必须供给无穷多次应用的可能. 对使用直接代入规则的演算言,尽管可证性观念仍然一样(读者可自行证明),但是可推演性关系却更加广泛了.现在,推演定理以及(依赖于它的)其余辅助推演规则必须对命题变元在辅助推演中的使用(当应用新的代入规则时)有所限制,该

1) 一般,对任何公式 A,B 言,¬A 定义为A|A,A∨B 定义为(¬(A)|¬B)——译者注.

限制恰和谓词演算中在使用规则 9 与12时个体变元所受的限制一样[1].

在把命题演算作为一个形式体系而建立时，虽有上述两种不同方式(还有别的)，但本质上我们还是得到同一的演算. 除却运算子的选择有所不同外，可证公式集以及解释 (两客体域的算术) 还是一样的. 所有这些体系，以及抽象掉其特殊表述后所得的公共理论，可以叫做古典命题演算或二值命题演算.

其它的命题演算 此外还有别的命题演算，它们所以是命题演算因为它们对一命题的分析只分析到它如何由 (当作一个整体的)别的命题而构成，因而它们对公式所作的定义本质上是一样的(除却运算子有特别的选择外)，但它们却和这里所研究的系统有本质的不同.

有一类是把二值命题演算推广至 n 值命题演算，n 为 $\geqslant 2$ 的任何正整数. 当 $n>2$ 时它们由卢卡西维支 [1920] ($n=3$)及坡斯特 [1921] (任何 n) 所研究. 它们可借助于 n 客体算术中的真值表而处理[2]，正和古典系统可借助于两个客体的表面处理一样. (参见，例如，卢卡西维支与塔斯基[1930]，罗歇与屠尔凯 [1945, 1949, 1952].)[3]

另一例子是直觉主义命题演算(海丁[1930])[4]，它可作为对命题的直觉主义数学推理的形式体系化. 正如 §23 所指出的，如果在我们的公设群 A1 (或 A) 中简单地把公理模式 8 代以公理模式 8^{I}，我们便得到它的(或直觉主义谓词演算的)公设表了，这并非海丁原来的公设表而是由坚钦[1934—5]所提示的. (海丁对谓词演

1) 对有直接代入公设规则的命题演算言，把任一个不可证命题公式作为公理而加到演算去，由定理 10 系 2，必然引起矛盾，因为这时公理已有公理模式的作用了(参见第 142 页脚注)——俄译注.

2) 这时在 n 个客体中有 p 个($1\leqslant p<n$)叫做特指值. 演算的真值表解释为：每一逻辑运算子都对应于一函数，以 n 客体域为定义域及值域. 如果在解释之下对变目的每一组值一公式都永取特指值，则这公式便是永真的. ——俄译注.

3) 值得提出雅布隆斯基 (С. Б. Яблонский) 的著作[1954°, 1956°]——俄译注.

4) 就本书全书体例，古典系统与直觉主义系统是平行发展的，这里把后者放在“其它系统”内，似欠考虑——译者注.

算的公设见海丁[1930 a].）我们加以编号的各结果以及附有着重点的各定理，如果在我们的以往讨论中不是直觉主义地证明的，都已标有记号“°”，到底它们是否对直觉主义系统不成立，这是一个需要就各个个别情况加以深入讨论的问题．本书后文将加以讨论(§80,§82)．本节的结果，即命题演算是有判定过程的这个结果，对直觉主义系统亦是成立的（§80 定理56(d)）．现在已经知道，在直觉主义的命题演算中，四个运算子没有一个是能够由其余三个运算子表示出来的（怀斯堡（Wajsberg）[1938]，麦坚西(McKinsey)[1939]）；而且该演算亦不能用有限的 n 值的真值表来讨论(哥德尔[1932])[1]，但使用 $n=\aleph_0$ 值时则是可以的(雅斯柯夫斯基[1936*])．

与这里所研究的古典演算有所不同的还有严格蕴涵的命题演算（路易斯[1912]）与模态命题演算，它处理‘可能性’‘必然性’等等．（参见路易斯与朗福德[1932]，费依（Feys）[1937—38]，麦坚西与塔斯基[1948]，费依[1965]．）

1) 如果对直觉主义命题演算存在一个解释，并可作为 n 值演算的解释(参见前面脚注)，则公式 $(A_1 \supset A_2) \vee \cdots \vee (A_n \supset A_{n+1})$（所有 $A_i \supset A_j$，$i<j, i,j \leq n+1$ 形的项的析取式）便将永远取得特指值（因为每一个含有 $A \supset A$ 项的析取式是可证的)因而便是可证的；根据本书第十五章定理 57，便将有 i,j 而 $i \neq j$ 使得蕴函式 $A_i \supset A_j$ 为可证的，这与定理 9 相矛盾——俄译注．

第七章 谓词演算

§31. 谓词字母公式

在本章内我们研究恰巧只使用群A的公设时所得的形式系统.

前章所研究的命题演算只是形式体系化了下列的逻辑关系,即分析一命题如何由别的更简单的命题组成,而所用的组成运算是把更简的命题当作未分解的整体的.

在谓词演算中,我们的分析更进一步,还可以考虑这种更简单的命题的"主语—谓词"结构,并可以使用与这种结构有关的组成运算.

这种分析仍然没有把数论命题结构的各种面貌都考虑到. 正和前章一样,为了强调这点,我们引入另一种公式概念,把公式的数论式定义中各种不相干的细节删除,以便可有更广泛的应用.

我们首先引进一种新的形式表达式,它是§25所引入的命题字母的推广,如下,

$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{A}(\boldsymbol{a}), \boldsymbol{A}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}), \cdots, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{B}(\boldsymbol{a}), \boldsymbol{B}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}), \cdots, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{C}(\boldsymbol{a}), \boldsymbol{C}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}), \cdots$. 这些表达式叫做(具有附加变元或命名式变元的)谓词字母.(译者按,命名式变元指 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 等,它们只用以表示空位个数而不是'个体'变元.)以前用作命题字母的每一个符号现在对于不同的 $n \geqslant 0$ 都变成了具有 n 个附加变元的不同谓词字母,当 $n=0$ 时,谓词字母便是命题字母. 这 n 个附加变元可以是任何 n 个不同的变元. 同一的谓词字母而选用不同的附加变元时便得到该谓词字母的不同的命名式,例如,$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$,$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{b},\boldsymbol{a})$及$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{c},\boldsymbol{d})$便是由 $\boldsymbol{A}$ 及两个附加变元所组成的谓词字母的三个不同的命名式,但,$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{a})$及 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$则是别的谓词字母,而 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})$不是谓词字母. 经常在某个讨论中,我们总是把在整个讨论中出现的

每个不同的谓词字母只用一个命名式来表示，即在整个讨论中，只用一个固定的 n 个附加变元序列；一般是把这 n 个附加变元从一个无穷变元序列 $a_1, a_2, a_3, \cdots$ 中取前面的 n 个（这序列一般是用 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \cdots$）[1]。

在谓词字母公式的定义内（归纳地定义于后），所谓项全是变元。但我们宁可有时说"项"有时说"变元"，使得容易看出如何可把讨论加以推广，因为在后面有时我们愿意把"项"还包括更多的东西而不只是单纯的变元。

1. 如果 $P(a_1, \cdots, a_n)$ 是具有附加变元的谓词字母，而 $t_1, \cdots, t_n$ 为项，则 $P(t_1, \cdots, t_n)$ 是一公式. 2—5. 如果 A 与 B 是公式，则 $(A)\supset(B)$，$(A)\&(B)$，$(A)\vee(B)$ 及 $\neg(A)$ 是公式. 6—7. 如果 x 是一变元，而 $A(x)$ 是一公式，则 $\forall x(A(x))$ 及 $\exists x(A(x))$ 是公式. 8. 只有由 1—7 所给出的才是公式.

例 1 由 1，$\boldsymbol{A(b,a)}$，$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{A(a,b)}$ 及 $\boldsymbol{A(a,a)}$ 为谓词字母公式. 这可由两个命名式 $\boldsymbol{A(a,b)}$ 及 $\boldsymbol{B}$ 出发便得. 继续使用 3 及 2（根据通常的约定，§17，可删去括号），可知 $\boldsymbol{A(b,a)\&B}$ 及 $\boldsymbol{A(b,a)\&B\supset A(a,b)}$ 为谓词字母公式. 最后由 6 可知，$\boldsymbol{\forall b(A(b,a)\&B\supset A(a,b))}$ 为谓词字母公式.

在本章内，当我们说"项""公式"而不明指其意义时，这两名词既可分别理解为自由变元及谓词字母公式，亦可以作数论的意义而理解（§17）. 这两个形式体系虽同以群 A(§19) 为公设表，但其形成规则却不相同，我们把它们分别叫做纯谓词演算及数论谓词

---

1) 应该分别"谓词字母"概念和"具附加变元的"谓词字母"或"具命名式变元的谓词字母"这概念（在译文中正如在原文中一样，"具附加变元"等字样可以省去，因为由上下文可知所指是那一个而不致混乱）. 今设 C 为命题字母而 $z_1, \cdots, z_k$ 为不同的变元；则形式表达式 $C(z_1, \cdots, z_k)$ 叫做具附加变元的谓词字母或具命名式变元的谓词字母. 两个具附加变元的谓词字母 $C(z_1, \cdots, z_k)$ 与 $D(u_1, \cdots, u_l)$ 叫做是同一谓词字母的命名式，如果 C 与 D 同而 k 与 l 同. 因此谓词字母概念亦是由抽象得来的，即由（作为同一谓词字母的命名式的）那些具附加变元的谓词字母抽象出来的那个公共东西——俄译注.（中译者按：原作者所以要引入"具附加变元的谓词字母"一概念，似正在于根本不用抽象的"谓词字母"这个概念. 俄译者的区别虽无误，但与原作者的着眼点不同.）

演算.

当进入元数学以前,我们先看看,这个形式体系如何可以解释为谓词的演算.

在通常的语气中,一命题是用句子表示的. 这样,'谓词'便由不完全句或者含有空位的句子空框来表示. 例如,"——是人"便表示一谓词. 当我们把空位填以主语之名如"苏格拉底(Socrates)"时,便得到一个句子,"苏格拉底是人". 这种情况可以用近代数学上'函数'一概念(§10)来描述. 这时,谓词便是一元函数. 其变元的变域是一个以苏格拉底、奇伦等为元素的域.由这函数可使这域内每一个元素对应于一命题; 即当自变元以这域的元素作为变值时,这谓词便以命题作为相应的值. 因此谓词便是一元命题函数. 谓词又常叫做'特性',例如,在第二、三章内我们便是这样称呼的. 在这种用语下,"——是人"便表示是人这个特性 P,而"苏格拉底是人"便表示下命题: 苏格拉底具有特性 P. 另一个有关的名称是'类';"苏格拉底是人"表示苏格拉底属于人这个类 C. (就严格的文法意义说,谓词是一句子对其主语所说的,这比'一元命题函数'或'特性'要狭一些,因为照文法所说,对谓词而言,在句子空框里所省去的名词必须是该句的主语才成.)

作为第二个例,试讨论下列的句子空框: "——爱——"·就文法的用语说,这里有一个他动词及两个空位,其一须填人主语的名如"贞妮",另一须填人宾语的名为"约翰". 至于结果所得的是真命题或假命题,我们不加讨论. 在这例中,句子空框表示一个二元关系,即两元素之间的关系,换句话说,表示二元命题函数.

在别的例子里,可以有好些相应的空位需填人同样的名的.例如"$——_1$为$——_2$的父亲或$——_1$为$——_2$的母亲"表示一个二元关系,亦可表示为"$——_1$是$——_2$的父母".

读者容易作出一些句子空框的例子, 在其中包含有任意多的 n 个空位或 n 个相应的空位组的. 这样的句子空框表示 n 元关系或 n 元命题函数.

从函数的观点来说, 传统意义的 '谓词' (第一个例子) 与 '关

系'之间的差别是无关重要的；同样，在前两例中主语与宾语间的差异亦然。今后通称为'谓词'及'客体'，那将是更方便的。因此，所谓（n 元）谓词将指 n 元的命题函数，这里 n 可为 0，所指为一命题，n 可为 1，所指为传统意义的谓词或特性，n 可>1，所指为 n 元关系。（当 $n>0$ 时）自变元的值叫做客体，而自变元叫做客体变元。

谓词演算便是把这样广泛意义的'谓词'，即命题函数，来处理的逻辑。因此有些作者不称之为"谓词演算"而称之为'函词演算'。

这里我们只讨论下列情形的谓词演算，即它的所有客体变元都指同一的客体域，这时客体亦可以叫做个体，而客体复元又叫做个体变元。就应用于我们的数论系统来说，这个（具同一的客体域的）情形已经够用了，这时客体域便是自然数集。

在谓词演算的处理中，并不对客体域作任何假设，除却假设它非空即它至少有一元素以外。就纯演算而言，甚至于没有引用域中某特别客体的工具，即我们虽有个体变元却没有个体常项。

我们再看如何来选择表示谓词的符号体系。上面我们用空白来表示句子空框中的空位，它们可代以数学中常用的称作'变元'的字母。因此，我们不说"$——_1$ 是 $——_2$ 的父亲或 $——_1$ 是 $——_2$ 的母亲"而说（1）"a 是 b 的父亲或 a 是 b 的母亲"。数学上的例子如（2）"a 是偶的"，（3）"a 等于 b"，（4）"a 小于 b"等。

更进一步，既然谓词是函数的一种，即以命题为值的函数，因此在称呼谓词时，除却另有常用的记号外，我们便用函数记号（§10）。例如，我们可把（1）的谓词记为"$P(a, b)$"（即"a 是 b 的父母"），（2）的谓词记为"$E(a)$"，即依函数记法把谓词记号（"P"或"E"）放在自变元之前。（在 §7 处用"$P(n)$"表示 n 有特性 P 时我们已经这样做了。）对（3）及（4）我们却用常用的关系记号"$a=b$"及"$a<b$"，把谓词记号（"$=$"或"$<$"）放在自变元之间。

在纯谓词演算中，谓词字母如 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$，$\boldsymbol{B}$ 等是被解释为代表未明指的谓词的，即 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ 代表一个二元谓词，$\boldsymbol{B}$ 代表一个

零元谓词(即命题)等等. 因此，任何谓词字母公式都可以解释为代表一个谓词，该谓词由公式中出现的不同谓词字母所表示的谓词而决定，例如，$\forall \boldsymbol{b}(\boldsymbol{A}(\boldsymbol{b},\boldsymbol{a})\&\boldsymbol{B}\supset\boldsymbol{A}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}))$ 表示一元谓词(该元相应于自由 $\boldsymbol{a}$)，该谓词由 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ 所表示的二元谓词及 $\boldsymbol{B}$ 所表示的命题所决定.

注意，如果我们用 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ 作为具有两个附加变元的谓词字母 $\boldsymbol{A}$ 的命名式，则在解释中，当选定 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ 应当代表什么后，便须照函数记法(§10)的标准约定而决定 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{c},\boldsymbol{b})$，$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})$，$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{b},\boldsymbol{a})$ 等的意义.

类似地，按照各符号的通常数论的意义，在数论系统中任何公式都可以解释为表示一谓词. 例如，$\exists \boldsymbol{c}(\boldsymbol{a}=0''\cdot\boldsymbol{c})$表示 $E(a)$ 或 a 为偶的，$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$ 表示 $a=b$，而 $\exists \boldsymbol{c}(\boldsymbol{c}'+\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b})$ (在 §17 中缩写为 $\boldsymbol{a}<\boldsymbol{b}$)表示 $a<b$.

设 $\mathrm{x}_1,\cdots,\mathrm{x}_n$ 为不同的变元，而 $\mathrm{A}(\mathrm{x}_1,\cdots,\mathrm{x}_n)$ 为一公式(任一意义的公式). 当我们把 $\mathrm{A}(\mathrm{x}_1,\cdots,\mathrm{x}_n)$ 解释为一谓词，或对它作形式运算而该运算与把它解释为谓词一事相符合时(即使在形式运算中不牵涉到该解释)，我们便把 $\mathrm{A}(\mathrm{x}_1,\cdots,\mathrm{x}_n)$ 叫做以 $\mathrm{x}_1,\cdots,\mathrm{x}_n$ 为命名式变元的命名式，并说，$\mathrm{x}_1,\cdots,\mathrm{x}_n$ 有命名式解释或有谓词解释. 命名式 $\mathrm{A}(\mathrm{x}_1,\cdots,\mathrm{x}_n)$ 是系统中的公式；而"$\mathrm{A}(\mathrm{x}_1,\cdots,\mathrm{x}_n)$"则是该公式的元数学的名称(根据 §18 的代人记法)；有时我们还引入"$A(x_1,\cdots,x_n)$"作为谓词 $A(x_1,\cdots,x_n)$ 的名，后者乃是在解释之下公式 $\mathrm{A}(\mathrm{x}_1,\cdots,\mathrm{x}_n)$所表示的谓词.

很自然地，我们应把具有自由变元的公式解释为谓词，例如，当我们讨论该系统的形成规则而所考虑的公式又被当作另一公式的成份时. 至于把公式解释为命题一事，我们将在§32之末加以讨论.

§ 32. 导出规则,自由变元

要使用定理 2(§23) 中谓词演算的导出规则，我们必须注意变

元所受的限制：(1)∀消或∃引中的 t 必须对 A(x) 中的 x 是自由的(参见 §18)。(2)∃消的 x 必不能在C中自由出现.(3)在辅助推演中对被解除的假定公式而言自由变元是保持固定的(参见§22)。开始时我们插入括号加入附注以提醒读者注意，但后来则逐渐的让读者自己注意了。

定理 13 在 *64—*68 中，设 $x_1, \cdots, x_n$ 为不同的变元，$A(x_1, \cdots, x_n)$ 为一公式，$t_1, \cdots, t_n$ 为项（不必相异），分别对 $A(x_1, \cdots, x_n)$ 中的 $x_1, \cdots, x_n$ 是自由的. 对 *67，还须假设C是不含任何自由 $x_1, \cdots, x_n$ 的公式. $\Gamma(x_1, \cdots, x_n)$ 是零个或多个公式的有限序列，并假设对辅助推演中最后的假定公式 $A(x_1, \cdots, x_n)$ 而言自由变元是保持固定的. 则有:

*64. $A(x_1, \cdots, x_n) \vdash^{x_1 \cdots x_n} \forall x_1 \cdots \forall x_n A(x_1, \cdots, x_n)$.

*65. $\forall x_1 \cdots \forall x_n A(x_1, \cdots, x_n) \vdash A(t_1, \cdots, t_n)$.

*66. $A(x_1, \cdots, x_n) \vdash^{x_1 \cdots x_n} A(t_1, \cdots, t_n)$.

*68. $A(t_1, \cdots, t_n) \vdash \exists x_1 \cdots \exists x_n A(x_1, \cdots, x_n)$.

*67. 如果 $\Gamma(x_1, \cdots, x_n), A(x_1, \cdots, x_n) \vdash C$，则 $\Gamma(x_1, \cdots, x_n), \exists x_1 \cdots \exists x_n A(x_1, \cdots, x_n) \vdash^{x_1 \cdots x_n} C$.

(n 重∀引，∀消，代入，∃引及∃消.)

如果 x 是一变元，A(x) 与 B(x) 为公式，则:

*69. $A(x) \supset B(x) \vdash^{x} \forall x A(x) \supset \forall x B(x)$.

*70. $A(x) \supset B(x) \vdash^{x} \exists x A(x) \supset \exists x B(x)$.

证明 *64. 继续应用简单∀引规则(§23) n 次.

对 *65 及 *66(及后面的 *68)，我们分两情形. **情形 1**: $t_1, \cdots, t_n$ 不含 $x_1, \cdots, x_n$. **情形 2**: 此外[1].

*65 **情形 1** n 次使用简单∀消得

$$\forall x_1 \cdots \forall x_n A(x_1, \cdots, x_n) \vdash \forall x_2 \cdots \forall x_n A(t_1, x_2, \cdots, x_n) \vdash \forall x_3 \cdots \forall x_n A(t_1, t_2, x_3, \cdots, x_n) \vdash \cdots \vdash \forall x_n A(t_1, \cdots, t_{n-1}, x_n) \vdash$$

1) 这种对排中律的应用是有穷性的，因为每一次都可以在两情形 1 与 2 中认出那一种成立. 同样今后在有穷性的穷举证明或穷举定义中出现有“此外”(或“其余情形”等字样)时均可适用同样的附注——俄译注.

$A(t_1,\cdots,t_n)$.

把本情况假设(按即 $t_1,\cdots,t_n$ 不含 $x_1,\cdots,x_n$——译者)及定理的假设即 $t_1,\cdots,t_n$ 分别对 $A(x_1,\cdots,x_n)$ 中的 $x_1,\cdots,x_n$ 是自由的,两者合并起来便保证了 t_1 对 $\forall x_2\cdots\forall x_n A(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 中的 x_1 是自由的,t_2 对 $\forall x_3\cdots\forall x_n A(t_1,x_2,x_3,\cdots,x_n)$ 中的 x_2 是自由的,等等.(情形 2 将放在 *66 情形 1 之后.)

*66 **情形 1** 合并*64 及*65 情形 1 而得(或 n 次使用简单代入规则 §23).

*65 **情形 2** 设 $w_1,\cdots,w_n$ 为变元,彼此不同,与 $x_1,\cdots,x_n$ 亦不同,又不出现于 $A(x_1,\cdots,x_n)$ 或 $t_1,\cdots,t_n$ 中. 则由 *65 及 *66 的情形 1 得

$$\forall x_1\cdots\forall x_n A(x_1,\cdots,x_n)\vdash A(w_1,\cdots,w_n)\vdash^{w_1\cdots w_n} A(t_1,\cdots,t_n).$$

*68 **情形 2** $A(t_1,\cdots,t_n)\vdash\exists w_1\cdots\exists w_n A(w_1,\cdots,w_n)$. 又 $A(w_1,\cdots,w_n)\vdash\exists x_1\cdots\exists x_n A(x_1,\cdots,x_n)$,故由 *67 得

$$\exists w_1\cdots\exists w_n A(w_1,\cdots,w_n)\vdash\exists x_1\cdots\exists x_n A(x_1,\cdots,x_n).$$

*69. 1. $A(x)\supset B(x),A(x)\vdash B(x)\vdash^{x}\forall xB(x)$——$\supset$消,$\forall$引.

2. $A(x)\supset B(x),\forall xA(x)\vdash^{x}\forall xB(x)$——$\forall$消,1[根据 §18 定义 1,项 x 对 $A(x)$ 中的 x 是自由的].

3. $A(x)\supset B(x)\vdash^{x}\forall xA(x)\supset\forall xB(x)$——$\supset$引,2[在辅助推演 2 中,就被解除的假定公式 $\forall xA(x)$ 言,变元 x 保持固定,因为 x 在 $\forall xA(x)$ 中不自由出现].

*70. 1. $A(x)\supset B(x),A(x)\vdash B(x)\vdash\exists xB(x)$——$\supset$消,$\exists$引[参见 *69 第二步].

2. $A(x)\supset B(x),\exists xA(x)\vdash^{x}\exists xB(x)$——$\exists$消,1[$\exists xB(x)$ 不含自由 x,而在辅助推演 1 中 x 保持固定].

3. $A(x)\supset B(x)\vdash^{x}\exists xA(x)\supset\exists xB(x)$——$\supset$引, 2[$x$ 不自由出现于 $\exists xA(x)$ 中].

在 *70 第二步中所引用的 $\exists$ 消规则是一个辅助推演规则,而 *69 第二步所用的 $\forall$ 消规则却已经建立为一个更强的直接规则了(虽则根据 §23 例 1 所引入的缩写法,这两步骤可以同样表示).所

以对 *70 的第二步给根据时用了更大的小心.

例 1 对公式 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})$ 而使用∀引只有一法，若使用∃引(简单的或 2 层的)则有多法如下.

$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}) \vdash^{*} \forall \boldsymbol{a}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})$——∀引，令 x 为 $\boldsymbol{a}$; A(x) 为 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})$.

$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}) \vdash \exists \boldsymbol{a}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})$——∃引，令 x 为 $\boldsymbol{a}$; A(x) 为 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})$; t 为 $\boldsymbol{a}$.

$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}) \vdash \exists \boldsymbol{b}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$——∃引，令 x 为 $\boldsymbol{b}$; A(x) 为 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$; t 为 $\boldsymbol{a}$.

$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}) \vdash \exists \boldsymbol{b}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{b},\boldsymbol{a})$——∃引，令 x 为 $\boldsymbol{b}$; A(x) 为 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{b},\boldsymbol{a})$; t 为 $\boldsymbol{a}$.

$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}) \vdash \exists \boldsymbol{a}\exists \boldsymbol{b}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$——2 次∃引，令 x_1, x_2 为 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$; A(x_1, x_2) 为 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$; t_1,t_2 为 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{a}$.

$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}) \vdash \exists \boldsymbol{a}\exists \boldsymbol{b}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{b},\boldsymbol{a})$——2 次∃引，令 x_1, x_2 为 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$; A (x_1, x_2) 为 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{b},\boldsymbol{a})$; t_1, t_2 为 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{a}$.

有自由变元的公式的解释 定理 2 中辅助推演规则所受的必要的限制，即对每个被解除的假定公式言，自由变元须保持固定，这一事可从解释上的若干附注而得到阐明，这些附注当然不是元数学的一部分.

在下文的例 2 第一步中，我们有一个由 $\boldsymbol{b} \neq 0$ 而作的推演，而 $\boldsymbol{b}$ 是保持固定的，所以马上可以引用⊃引. 在例 3 中，⊃引却不能够马上引用，因为 $\boldsymbol{b}$ 是变化的，但经过∀消后却可以引用了. 在例4，我们可以看见，如果不遵守对辅助推演所作的限制，便会得到一个错误的结果(在数论解释之下).

例2 1. $\boldsymbol{b} \neq 0 \vdash \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{a}$——可以在 $\boldsymbol{b}$ 保持固定的情形下而在数论系统内证出(§39;又"$s \neq t$"为 $\neg s = t$ 的缩写,见§17).

2. $\vdash \boldsymbol{b} \neq 0 \supset \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{a}$——⊃引,1.

3. $\vdash \forall \boldsymbol{b}(\boldsymbol{b} \neq 0 \supset \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{a})$——∀引,2.

例3 1. $\boldsymbol{b} \neq 0 \vdash {}^{\boldsymbol{b}}0 \neq 0$——代入(§23),$\boldsymbol{b}$ 是变化的.

2. $\forall \boldsymbol{b}(\boldsymbol{b} \neq 0) \vdash 0 \neq 0$——∀消,1.

3. $\vdash \forall \boldsymbol{b}(\boldsymbol{b} \neq 0) \supset 0 \neq 0$——$\supset$引，2.

例4 1. $\boldsymbol{b} \neq 0 \vdash^{\boldsymbol{b}} 0 \neq 0$——同例 3 第一步.

2? $\vdash \boldsymbol{b} \neq 0 \supset 0 \neq 0$——$\supset$引，误用于 1 上.

3? $\vdash \forall \boldsymbol{b}(\boldsymbol{b} \neq 0 \supset 0 \neq 0)$——$\forall$引，2.

4? $\vdash 0' \neq 0 \supset 0 \neq 0$——$\forall$消，3.

5. $\vdash 0' \neq 0$——对公理 15 作代入.

6? $\vdash 0 \neq 0$——规则 2，5，4.

在例 4 中破坏形式规则的只在第二步处. 读者在读到下文的讨论以前可先自行解释以说明其错误. 特别注意例 3 与例 4 中第三步的两公式的差异. 此外读者亦可对下列两例补充一些形式方面的细节，并比较其结果.

例 5 如果给出 $A(x) \vdash B$ 及 $A(x) \vdash \neg B$，而 x 是固定的，则有$\vdash \neg A(x)$及$\vdash \forall x \neg A(x)$.

例 6 如果给出 $A(x) \vdash^{x} B$ 及 $A(x) \vdash^{x} \neg B$，x 未必是固定的，则有$\vdash \neg \forall x A(x)$.

对 $\vee$ 消及 $\exists$ 消亦可同样讨论.

我们知道，在非形式数学中，叙述一命题时对自由变元的两种不同用法，可用代数学中恒等式 $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ 及条件等式 $x^2 + 2 = 3x$ 来说明.

第一个解释可用于我们系统中的公理及形式定理中的自由变元，叫做全称性解释. 例如，公理 14 即 $\boldsymbol{a}' = \boldsymbol{b}' \supset \boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$，意指对任何两个自然数 a，b，如果 $a' = b'$ 则 $a = b$；在 §19 例 1 中所证明的形式定理 $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}$，则说每个自然数都等于它自身.

但当把具有自由变元 x 的公式 A(x) 作为一个形式推演的假定公式时，我们却可以有所选择. 我们或者把这假定读成“假设对于所有 x，A(x)”，因此 x 有一个全称性解释. 但我们亦可读成“设 x 为一数使得 A(x)”，这时我们说，x 有条件解释.

在第二个解释之下，我们便不该在推演中使用一些运算，它们(从意义上说来)必须容许 x 在变域上有变化的可能的. 在全称性解释之下可没有这个限制. 例 2 第一步的推演是和条件解释符合

的；例 3 及例 4 的第一步则只能和全称性解释符合。至于说在全称性解释之下假定公式 $b \neq 0$ 是假的这一事在这里是无关紧要的，并且例 3 的结论公式也是完全正确的（虽则并不是很有趣的）。

初等数学的学者都熟悉常数符号与变数符号之间的区别，进一步的考察可以知道符号用法的区别全视上下文而异。一给定的符号常作为一客体的名称而引入，并且在某一段文字中这符号的每次出现都作为同一客体的名字。从文章以外可以看出该客体可以是某集中任一元素(或某元素等)。因此本质上说来，在文章之内一符号必是常数即不能更改意义的，只从文章以外看时它才是变元。

（在一给定的理论中，实际上所使用的用语一般说是以整个理论的内容为准的。有时一个符号在一个重要的整个小段中是不变的，但就整个理论说却是变的，这时便叫做‘参变元’或‘任意常数’。）

当公式 $A(x)$ 中变元 x 作全称性解释时，要求 x 的每次出现必须表示同一的客体的那段上下文恰巧便是整个公式 $A(x)$。因此 $A(x)$ 便和 $\forall xA(x)$ 同意，所以仿照量词 $\forall x$ 的辖域那样，我们说 $A(x)$ 是自由变元 x 所表示的全称性的辖域。

对条件解释言，要求 x 的一切（自由）出现必须有同一意义的那段上下文不恰巧是 $A(x)$ 本身而是由 $A(x)$ 出发而作的整个推演（或该推演中依赖于 $A(x)$ 的部分）。

在例 4 第一步，在全称性解释下 b 所表示的全称性的辖域恰巧便是假定公式 $b \neq 0$。如果第二步的公式是可证的，则全称性解释便应用到整个公式，辖域将是 $b \neq 0 \supset 0 \neq 0$ 而不只是其中一部分 $b \neq 0$。

在我们的逻辑符号体系中全称量词 $\forall x$ 是用以把全称性辖域限制于公式的一部分的。在自由变元的全称性解释下，例 4 的第三、三步两公式（或例 5 的两结论）是彼此同义的。但若不用量词则和例 3 第 3 步(或例 6 的结论)同义的公式是无法写出的。

设A为一公式其中所有自由变元恰巧为（依其出现的先后）$x_1, \cdots, x_n$. 依 $n>0$ 或 $n=0$ 而分别把A叫做开的或闭的. 闭公式 $\forall x_1 \cdots \forall x_n A$ （有时省写为"$\forall A$")叫做A的闭包. 由 *64 及 *65, A与 $\forall A$ 可互相推演出（即由一式可推演出它式），而从A到 $\forall A$ 的推演中, $x_1, \cdots, x_n$ 是变的. 在全称性解释之下, A与 $\forall A$ 是同义的.

§33. 替　换

设 C_A 为一公式，且对其中A的某一次出现作了明指，设把这次出现换为B后得公式 C_B(§26). 如果根据公式定义中句2—7而由A构作 C_A 以及由B构作 C_B，两者将有平行的过程（§17或§31). 构作 C_A 过程中步骤的个数(或者其辖域中含有A的那些运算子的个数)叫做A在 C_A 中的深度.

例1 设A为 $\boldsymbol{A(b, a)}$, C_A 为 $\forall \boldsymbol{b}(\boldsymbol{A(b, a)} \& \boldsymbol{B} \supset \boldsymbol{A(a, b)})$ （所明指的出现就是唯一的出现），而B为 $\exists \boldsymbol{d} \boldsymbol{A(d, a, c)}$. 则 C_B 为 $\forall \boldsymbol{b}(\exists \boldsymbol{d} \boldsymbol{A(d, a, c)} \& \boldsymbol{B} \supset \boldsymbol{A(a, b)})$. 由A到 C_A 及由B到 C_B 的平行构成过程如下,而深度为3.

$\boldsymbol{A(b, a)}$	$\exists \boldsymbol{d} \boldsymbol{A(d, a, c)}$
$\boldsymbol{A(b, a)} \& \boldsymbol{B}$	$\exists \boldsymbol{d} \boldsymbol{A(d, a, c)} \& \boldsymbol{B}$
$\boldsymbol{A(b, a)} \& \boldsymbol{B} \supset \boldsymbol{A(a, b)}$	$\exists \boldsymbol{d} \boldsymbol{A(d, a, c)} \& \boldsymbol{B} \supset \boldsymbol{A(a, b)}$
$\forall \boldsymbol{b}(\boldsymbol{A(b, a)} \& \boldsymbol{B} \supset \boldsymbol{A(a, b)})$	$\forall \boldsymbol{b}(\exists \boldsymbol{d} \boldsymbol{A(d, a, c)} \& \boldsymbol{B} \supset \boldsymbol{A(a, b)})$

定理14 如果公式A, B, C_A 及 C_B 具有上文讨论替换时所说的关系，则

$$A \sim B \vdash^{x_1 \cdots x_n} C_A \sim C_B,$$

这里 $x_1, \cdots, x_n$ 是A或B的自由变元而属于 C_A 的量词的，而这些量词的辖域中是含有A的明指出现的(替换定理).

换句话说, $x_1, \cdots, x_n$ 是 $A \sim B$ 中的自由变元，而在从明指的A到 C_A 的构成过程中受到了量词化的. 本定理的证明可依深度而作归纳如前(§26定理6)，但用到两条新的引理.

补充替换引理 如果 x 为变元，A(x) 与 B(x) 为公式，则：

*71. $A(x) \sim B(x) \vdash^{x} \forall x A(x) \sim \forall x B(x)$.

*72. $A(x) \sim B(x) \vdash^{x} \exists x A(x) \sim \exists x B(x)$.

证明 由 *69 及 *70 分别得证.

例 1(续完) 今在两平行的列的每对公式之间写入 ~ 号，结果所得的每个公式可以由前面的公式推演出，只须继续使用 *28 a, *26 及 *27 (变化 *b*)便可.

系 1 在定理所述的条件下：如果 $\vdash A \sim B$ 则 $\vdash C_A \sim C_B$.

例 2° 由 *49(及 *20)，$\vdash A(x) \sim \neg\neg A(x)$. 故得

$$\vdash \neg\neg\forall x A(x) \sim \neg\neg\forall x \neg\neg A(x).$$

例 3 (参见 §26 例 2) 如果 A 与 B 不含自由 x，则：$A \sim B \vdash A \vee \forall x(A \supset C(x)) \sim A \vee \forall x(B \supset C(x))$. 如果 A 与 B 可能含有自由 x，则：$A \sim B \vdash^{x} A \vee \forall x(A \supset C(x)) \sim A \vee \forall x(B \supset C(x))$. 故恒得：如果 $\vdash A \sim B$ 则 $\vdash A \vee \forall x(A \supset C(x)) \sim A \vee \forall x(B \supset C(x))$.

系 2 在定理所述条件下：$A \sim B, C_A \vdash^{x_1 \cdots x_n} C_B$，这里 $x_1, \cdots, x_n$ 只是就第一个假定公式言是变化的. 如果 $\vdash A \sim B$，则 $C_A \vdash C_B$. (等价关系的替换性.)

在作替换以前，可以先对个体变元作代入(*66).

例 4 $b + 0 = a \sim a = b \vdash^{b} b' + 0 = a \sim a = b' \vdash^{b} \exists b(b' + 0 = a) \sim \exists b(a = b')$. 但在 §38 处我们将有 $\vdash b + 0 = a \sim a = b$. 故得 $\vdash \exists b(b' + 0 = a) \sim \exists b(a = b')$.

可以用解释来阐明在替换时关于变元的处理. 在非形式数学中，如果已知 $\sin x$ 与 $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ 是同一函数，即 $\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ 是一个恒等式(x 作全称性解释，§32)，我们便有理由来在“$\int_0^t \sin x dx$”中把“$\sin x$”换为“$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$”，又可把“$\sin 2x$”换为“$\cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)$”. 但假设了条件等式 $\sin x = 1 - x$ 后，我们没有权利在“$\int_0^t \sin x dx$”中把“$\sin x$”换为“$1 - x$”，亦没有权利把

“$\sin 2x$”换为“$1-2x$”.

约束变元的更改 满足下列条件时我们说公式A与B是相合的：A与B具有同数的k个符号，而且对于每个$i(i=1,\cdots,k)$而言：(I)如果A的第i个符号不是变元，则B的第i个符号与它相同. (II)如果A的第i个符号是一变元的自由出现，则B的第i个符号亦是同一变元的自由出现. (III)如果A的第i个符号是一变元的约束出现而被A的第j个量词所约束，则B的第i个符号亦是一变元(未必与A的相同)的约束出现且被B的第j个量词所约束.

简单说，如果两公式只有约束变元的差异而且相应的约束变元被相应的量词所约束，则它们便是相合的.

例5 下列两公式是相合的：

$$\forall \boldsymbol{a}(\boldsymbol{A}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{c})\vee\exists \boldsymbol{a}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{a})\supset\exists \boldsymbol{b}\boldsymbol{C}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})),$$

$$\forall \boldsymbol{b}(\boldsymbol{A}(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})\vee\exists \boldsymbol{c}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{c})\supset\exists \boldsymbol{a}\boldsymbol{C}(\boldsymbol{b},\boldsymbol{a})).$$

要看出这点可引入足码以表示变元的哪一些出现是被那一个量词所约束着的：

$$\forall \boldsymbol{a}_1(\boldsymbol{A}(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{c})\vee\exists \boldsymbol{a}_2\boldsymbol{B}(\boldsymbol{a}_2)\supset\exists \boldsymbol{b}_3\boldsymbol{C}(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{b}_3)),$$

$$\forall \boldsymbol{b}_1(\boldsymbol{A}(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{c})\vee\exists \boldsymbol{c}_2\boldsymbol{B}(\boldsymbol{c}_2)\supset\exists \boldsymbol{a}_3\boldsymbol{C}(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{a}_3))$$

如果我们把约束变元擦去，只留下空位及足码，我们便得到相同的表达式了.

引理15a 如果x为一变元，A(x)为一公式，b为一变元使得(i) b对A(x)中的x是自由的，(ii) b在A(x)中不自由出现(除非b是x)，则：

*73. $\vdash \forall xA(x)\sim\forall bA(b)$. *74. $\vdash \exists xA(x)\sim\exists bA(b)$.

证明 *73. 由§22例3(步骤1—2)得$\vdash \forall bA(b)\supset\forall xA(x)$，同样有$\vdash \forall xA(x)\supset\forall bA(b)$. 注意，由§18例9可知，(i)与(ii)是$\forall bA(b)$与$\forall xA(x)$相合(或$\exists bA(b)$与$\exists xA(x)$相合)的必要与充分条件.

引理15b. 相合的公式是等价的；即如果A与B相合，则$\vdash A\sim B$.

证明 设A含有 r 个量词，依次带有变元 $u_1,\cdots,u_r$（未必相异）. 设 $w_1,\cdots,w_r$ 为不同的变元，在A与B中均不出现. 在A中把每个 $u_j(j=1,\cdots,r)$的出现，凡是被第 j 个量词所约束的，都改为 w_j，设其结果为C. 根据 *73 或 *74 及定理 14 系 1 而继续作 r 次替换后便得 $\vdash A\sim C$. 同样有 $\vdash B\sim C$. 故得(*20，*21) $\vdash A\sim B$.

例5(续完) $\vdash \forall a(A(a,c)\vee\exists aB(a)\supset\exists bC(a,b))\sim\forall d(A(d,c)\vee\exists aB(a)\supset\exists bC(d,b))$ [*73] $\sim\forall d(A(d,c)\vee\exists eB(e)\supset\exists bC(d,b))$ [*74] $\sim\forall d(A(d,c)\vee\exists eB(e)\supset\exists fC(d,f))$[*74]. 仿此有
$\vdash\forall b(A(b,c)\vee\exists cB(c)\supset\exists aC(b,a))\sim\forall d(A(d,c)\vee\exists eB(e)\supset\exists fC(d,f))$.

附注1 (a)与定理 14 相类似但用*6—*9b，*12，*69，*70(而不用 *26—*30，*71，*72)作为引理可得：设 C_A 的一部分 A 是在符号⊃，&，∨，¬，∀，∃ 中某些符号的辖域之下. 则在只具有⊃公设及相应符号的公设的系统内我们有： $A\supset B\vdash^{x_1\cdots x_n} C_A\supset C_B$ 或 $B\supset A\vdash^{x_1\cdots x_n} C_A\supset C_B$. 但当该系统含有 ∀ 而没有 & 时，则 ∀ 公设须补入 §24 引理 11 中的公理模式 9a.(参见厄勃朗 [1930] §32，麦克兰 (MacLane)[1934]p. 28，寇里 (Curry)[1939] pp. 290—291.)

(b)只用公理 9 及 10(11 及 12)已经得出 $\vdash\forall xA(x)\supset\forall bA(b)$ 及 $\vdash\forall bA(b)\supset\forall xA(x)$ (∃ 准此). (c)因此，只用⊃公设以及(至多) 相应于A中所含的逻辑符号的公设可得：如果 A 与 B 相合则 $\vdash A\supset B$ 及 $\vdash B\supset A$ (因而 A，B 可以互相推演出)，不过仍须照(a)作出补充条件.

永久缩写 我们对永久缩写例如“$a<b$”(在 §17 之末讨论的)的使用和对临时缩写如“A(x)”，“$A(x_1,\cdots,x_n)$”等(§18)的使用在两方面说来是不相同的. 第一，前者不含有缩写中所未写出的自由变元(“潜伏自由变元”). 第二，为了免除把一些项代入到不自由的代入位置去，我们允许缩写时所删去的约束变元 (“潜伏约束变元”) 可以自由选取，使得我们想代入的任何项对各代入位置都

是自由的．缩写式的任何合法的复原式[1]都是彼此相合的，由引理15 b，因此都是等价的．因此在讨论可推演性问题和可证性问题时，用那一个合法的复原式是无关重要的．

但对于是否为某一公设的应用的问题来说，复原的方式却可以发生影响，例如，$s<t\supset(B\supset s<t)$一式，只当"$s<t$"的两次出现都用同法复原时才能根据模式 1a 而说它是一公理．因此今后在使用某一公式时我们恒暗中假定同样外貌的缩写都是用同法复原的．

*§ 34. 代 入

如果把所得结果用模式叙述，并使用元数学字母以代替而不使用特殊的谓词字母，则对谓词字母的形式代入规则的使用大部分是可以避免的．在应用这些所得的各种结果时（其中元数学字母的所指意义有了更改），我们是作了非形式的代入的，但这种代入并不能算作是形式代入规则的使用．从我们开始研究形式系统的时候起，我们已经一贯这样地做了．下面再举一例以明其意．

例 1° 在 *83 (§35) 中我们已证明，如果 x 为任何变元，而 A(x)为任何公式，则$\vdash\exists xA(x)\sim\neg\forall x\neg A(x)$．今设 x 为任何变元，而 A(x) 为任何公式．今取这个 A(x) 的否定即 $\neg A(x)$ 作为 *83 中的 A(x)，可得$\vdash\exists x\neg A(x)\sim\neg\forall x\neg\neg A(x)$．这例以及 §33 例 2 便说明了下列链中的第二、三两步骤：$\vdash\forall xA(x)\sim\neg\neg\forall xA(x)$[*49] $\sim\neg\neg\forall x\neg\neg A(x)$[*49] $\sim\neg\exists x\neg A(x)$[*83]．

对谓词演算的形式代入规则（定理 15）所作的唯一实质的使用是在对偶性的证明处（§35 定理 18 系），在那里，我们要把谓词字母代以该字母的否定．但根据命题演算代入规则（§ 25 定理 3）的证明处所使用的推理已可得到这个代入的根据，没有任何新的复杂性．形式代入的另一应用在于，先用对偶性原则来证明一批

1) 原文为 unabbreviations（即由它而得出缩写 abbreviations 的那个原有公式）——俄译注．

有关于特殊的谓词字母的结果，然后推广到一般的用元数学字母而叙述的结果．但这种应用亦可用下法避免，即我们只是权宜地[1]使用代入规则以发现其证明，然后我们不用该规则而作出证明．因此如果愿意的话，读者可以省去本节后面所作的关于代入规则的详细处理的讨论．

把“出现”这个观念的推广，对命名式的解释是合适的．在非形式数学中，作为函数的表达式时 $\sin x$ 出现于“$3\sin x+\cos x$”中，出现于“$\int_0^t \sin x\,dx$”中，出现于“$\cos x\sin 2x$”中，但作为数目的表达式时它只出现于第一式中．

为了简化本节的记号，我们假定，在同一个代入的分析中，每个不同的谓词字母的附加变元必取自无穷系列变元表 a_1，a_2，$a_3, \cdots$ 中的前 n 个(参见 §31)．但对不同的代入而言，这表可以不同(见下)．

所谓在谓词字母公式 E 中具有附加变元的谓词字母 $P(a_1, \cdots, a_n)$ 的一次出现是指 E 中形如 $P(t_1, \cdots, t_n)$ 的(连续的)部分，这里 $t_1, \cdots, t_n$ 为项．如果在谓词字母公式 E 中除却不同的谓词字母

(1) $P_1(a_1, \cdots, a_{n_1}), \cdots, P_m(a_1, \cdots, a_{n_m})$ $(n_1, \cdots, n_m \geqslant 0; m \geqslant 1)$，

外，没有其它的谓词字母出现，我们便说 E 是由这些谓词字母组成的谓词字母公式．

例 2. 谓词字母 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ 出现两次于 $\forall \boldsymbol{b}(\boldsymbol{A}(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}) \& \boldsymbol{B} \supset \boldsymbol{A}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}))$ 中，第一次出现作为 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a})$，第二次作为 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$．公式 $\forall \boldsymbol{b}(\boldsymbol{A}(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}) \& \boldsymbol{B} \supset \boldsymbol{A}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}))$ 是由 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ 组成的谓词字母公式．

把下列公式(依 §31 中的任一意义)

(2) $A_1(a_1, \cdots, a_{n_1}), \cdots, A_m(a_1, \cdots, a_{n_m})$

作为所写的变元的命名式来代入 E 中的谓词字母 (1) 处（结果得 E^*)，是指：对每个 $j(j=1, \cdots, m)$，我们把 $P_j(a_1, \cdots, a_{n_j})$ 在 E 中的每个出现 $P_j(t_1, \cdots, t_{n_j})$ 都同时代以 $A_j(t_1, \cdots, t_{n_j})$．

1) “heuristically”，即姑且先行使用某种欠根据的方法以助发现，以后再改用正式的严格证明——译者注．

命名式变元(即诸 a)本身未必以原来面目出现于 E 与 E^* 中. 到底一公式 E^* 是否由另一给定公式 E 对其中某些谓词字母作代入而得，要解决这问题，我们恒可把在 E 及 E^* 中都不出现的变元作为命名式变元，不过我们并不限于这样地选择命名式变元，如果别的变元亦可用的话.

如果对于 E 中谓词字母 $P(a_1,\cdots,a_n)$ 的每个出现 $P(t_1,\cdots,t_n)$ 都有下列情况，我们便说 $A(a_1,\cdots,a_n)$ 对 E 中的 $P(a_1,\cdots,a_n)$ 是自由的：(A1) 项 $t_1,\cdots,t_n$ 分别对 $A(a_1,\cdots,a_n)$ 中的 $a_1,\cdots,a_n$ 是自由的，(A2) 在 E 中表达式 $P_1(t_1,\cdots,t_n)$ 并不在 $\forall y$ 或 $\exists y$ 的辖域之内，这里 y 是 $A(a_1,\cdots,a_n)$ 中命名式变元 $a_1,\cdots,a_n$ 以外的自由变元. 如果对每个 j $(j=1,\cdots,m)$ 言，公式 $A_j(a_1,\cdots,a_{n_j})$ 对 E 中的 $P_j(a_1,\cdots,a_{n_j})$ 都是'自由的'，我们便说上述的代入是自由的.

例 3 设 $m=1$; $n=n_1=2$; a_1, a_2 为 c, d; $P(a_1,a_2)$ 为 $\boldsymbol{A}(c,d)$; $A(a_1,a_2)$ 为 $\forall b\boldsymbol{B}(a,b,c,d)\vee\boldsymbol{A}(d,c)$; 而 E 为 $\exists c\boldsymbol{A}(c,a)$. 则 E^* 为 $\exists c(\forall b\boldsymbol{B}(a,b,c,a)\vee\boldsymbol{A}(a,c))$. 这代入是自由的.

为方便起见，$a_1,\cdots,a_n$ 在 $A(a_1,\cdots,a_n)$ 中的自由出现叫做明显出现，变元在 $A(a_1,\cdots,a_n)$ 中的其它出现叫做潜伏出现. 明显地 [潜伏地] 自由 (约束) 出现于 $A(a_1,\cdots,a_n)$ 中的变元叫做 $A(a_1,\cdots,a_n)$ 的明显[潜伏]自由(约束)变元. 这种用语可推广到公式或公式的一部分而它是由元数学字母表示的场合.

例 4 如果把 $\boldsymbol{A}(a,b)\&\exists a\boldsymbol{B}(a,b,c)$ 作为具有 a, b 的命名式，并表以"$A(a,b)$"(或"$A(a_1,a_2)$"，这里"a_1"、"a_2"表示 a, b)，则 a 的第一个出现以及 b 的两个出现是明显的，而 a 的第二第三个出现及 c 的出现是潜伏的. 所以 a 及 b 为明显自由变元，c 是潜伏自由变元，a 是潜伏约束变元. 若用"$\forall aA(a,b)$"表 $\forall a(\boldsymbol{A}(a,b)\&\exists a\boldsymbol{B}(a,b,c))$，则 a 的前两个出现是明显的，其它两个出现是潜伏的；因此 a 既是明显约束变元又是潜伏约束变元，$\forall a$ 是明显量词，而 $\exists a$ 是潜伏量词.

在我们今后的代入例子中，变元 $a_1, a_2, a_3, \cdots$ 等将是 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \cdots$.（这种选择常是可以的，但对例 3 而言，这样选择将使在代入时潜伏变元有所干扰.）

(A1)或(A2)之所以不成立，恒由于潜伏变元的存在.

例 5 对 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{c}) \supset \boldsymbol{B}$ 中的 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{a})$ 言，公式 $\exists \boldsymbol{c} \boldsymbol{A}(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ 不是自由的，因为(A1)不满足（代入后得结果 $\exists \boldsymbol{c} \boldsymbol{A}(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{b}) \supset \boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{c})$ 中的 $\boldsymbol{c}$ 被 $\exists \boldsymbol{c} \boldsymbol{A}(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ 中的潜伏量词 $\exists \boldsymbol{c}$ 所约束了)，对 $\forall \boldsymbol{b}(\boldsymbol{A}(\boldsymbol{a}) \supset \boldsymbol{B}(\boldsymbol{b})$ 中的 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{a})$ 言，它(即 $\exists \boldsymbol{c} \boldsymbol{A}(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$——译者)亦不是自由的，因 (A2) 不满足（代入后得结果 $\forall \boldsymbol{b}(\exists \boldsymbol{c} \boldsymbol{A}(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \supset \boldsymbol{B}(\boldsymbol{b}))$，这时 $\exists \boldsymbol{c} \boldsymbol{A}(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ 中的潜伏自由变元 $\boldsymbol{b}$ 被 $\forall \boldsymbol{b}(\boldsymbol{A}(\boldsymbol{a}) \supset \boldsymbol{B}(\boldsymbol{b}))$中的量词 $\forall \boldsymbol{b}$ 所约束了).

条件(A1)与(A2)可以看作下列的条件：当用 $A(a_1, \cdots, a_n)$ 代入 $P(a_1, \cdots, a_n)$ 处后，由结果的 E^* 中每一部分 $A(t_1, \cdots, t_n)$ 都可以得出 $A(a_1, \cdots, a_n)$ 的一个出现，而且是当作具有 $a_1, \cdots, a_n$ 的命名式的一个出现.

例 6 在本例中，命名式变元将是 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$. 但我们补以足码用以标出变元的各次出现．设 E 为

(i) $\forall \boldsymbol{b}_1(\boldsymbol{A}(\boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{a}_3) \& \boldsymbol{B} \supset \boldsymbol{A}(\boldsymbol{a}_4, \boldsymbol{b}_5))$.

设 $A(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$, B, $C(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$（用以分别代入 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ 处的)为

(ii) $\exists \boldsymbol{c}_6 \boldsymbol{C}(\boldsymbol{c}_7, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}), \neg \boldsymbol{B}(\boldsymbol{a}_8), \boldsymbol{A}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$

(变元的加了足码的出现都是（潜伏出现）. 那末 E^*(对 E 作代入的结果)便是

(iii) $\forall \boldsymbol{b}_1(\exists \boldsymbol{c}_6 \boldsymbol{C}(\boldsymbol{c}_7, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_3) \& \neg \boldsymbol{B}(\boldsymbol{a}_8) \supset \exists \boldsymbol{c}_6 \boldsymbol{C}(\boldsymbol{c}_7, \boldsymbol{a}_4, \boldsymbol{b}_5, \boldsymbol{b}_5))$.

这代入是自由的.

下列引理的意义可由其后的例子而弄明白.

引理 16a 如果在 E 中把(2)代(1)的代入是自由的，则在结果 E^* 中，一变元的每个自由出现都或者由于该变元在 E 中的自由出现或者由于该变元在某个 $A_j(a_1, \cdots, a_{n_j})$ 中的潜伏自由出现，而一变元的约束出现以及管辖它的量词或者由于在 E 中已经如此

出现或由于在某个 $A_j(a_1, \cdots, a_{n_j})$ 中已潜伏地如此出现，而且管辖关系亦相同.

例 6(续完) (iii)中的两个自由 $\boldsymbol{a}_3$ 乃由于(i)中的自由 $\boldsymbol{a}_3$，自由 $\boldsymbol{a}_8$ 乃由于 (ii) 中的潜伏自由 $\boldsymbol{a}_8$. 被 $\forall \boldsymbol{b}_1$ 所约束的两个 $\boldsymbol{b}_5$ 乃由于(i)中 $\forall \boldsymbol{b}_1$ 所约束的 $\boldsymbol{b}_5$. $\exists \boldsymbol{c}_6$ 所约束的 $\boldsymbol{c}_7$ (两处)乃由于 (ii) 中的潜伏地被 $\exists \boldsymbol{c}_6$ 所约束的 $\boldsymbol{c}_7$.

证明大纲 讨论 E^* 中一变元的某次出现. 或者 (情形 1) 它不在任何部分 $A_j(t_1, \cdots, t_{n_j})$ 中出现(例如 $\boldsymbol{b}_1$)，或者(情形 2)在某一部分 $A_j(t_1, \cdots, t_{n_j})$ 中但不在任何 t_i 中出现(例如 $\boldsymbol{c}_6, \boldsymbol{c}_7, \boldsymbol{a}_8$)，或者(情形 3)在 t_i 的某次出现中出现，这是由于对 $A_j(a_1, \cdots, a_{n_j})$ 中 a_i 的自由出现作代入成为 $A_j(t_1, \cdots, t_{n_j})$ 后而引入的 (例如，$\boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4, \boldsymbol{b}_5$). 在情形 2 时用关于自由的条件(A2)，在情形 3 时用条件 (A1)，便得本引理的证明.

引理 16b 设公式

$(\tilde{2})$ $\tilde{A}_1(a_1, \cdots, a_{n_1}), \cdots, \tilde{A}_m(a_1, \cdots, a_{n_m})$

分别与公式(2)相合，又设公式 $\tilde{F}$ 与 F 相合. 如果在 F 中把(1)代以(2)得结果 F^*，在 $\tilde{F}$ 中把(1)代以$(\tilde{2})$得结果 $\tilde{F}^\dagger$，两代入同是自由的，则 $\tilde{F}^\dagger$ 与 F^* 相合.

注意，如果 F^* 的第 p 个符号由 F 的(或由 $A_j(a_1, \cdots, a_{n_j})$ 的)第 q 个符号而来，则 $\tilde{F}^\dagger$ 的第 p 个符号亦由 $\tilde{F}$ 的(或 $\tilde{A}_j(a_1, \cdots, a_{n_j})$ 的)第 q 个符号而来，再依引理 16a 便得证.

引理 17 如果给出一个对 F 的证明以及一列变元 $z_1, \cdots, z_q$，则我们可以找到一公式 $\tilde{F}$，与 F 相合且不以 $z_1, \cdots, z_q$ 的任一个作为约束变元，又找出一个对 $\tilde{F}$ 的证明，在其中应用规则 9 或 12 时不以 $z_1, \cdots, z_q$ 的任一个作为应用变元.

证明 设 F 中不同的自由变元为 $b_1, \cdots, b_s$，因而把 F 叫做 "$F(b_1, \cdots, b_s)$". 设 $u_1, \cdots, u_r$ 为在 F 的证明内各公式中所出现的所有不同的自由或约束变元(包括 $b_1, \cdots, b_s$). 设 $\bar{u}_1, \cdots, \bar{u}_r$ 为新变元，彼此不同亦和 $u_1, \cdots, u_r, z_1, \cdots, z_q$ 均不同. 根据谓词演算(§19 群 A 公设)的证明的定义，各变元在本质上是一样的. 因

此，如果在所给的 F 的证明中，我们把 $u_1,\cdots,u_r$ 的各次出现，约束的或自由的，同时分别改为 $\bar{u}_1,\cdots,\bar{u}_r$，结果必仍得出一个证明．设它是 $\tilde{F}(\bar{b}_1,\cdots,\bar{b}_s)$ 的证明；故 (a)$\vdash\tilde{F}(\bar{b}_1,\cdots,\bar{b}_s)$．由 n 重代入规则 (*66) 得 (b) $\tilde{F}(\bar{b}_1,\cdots,\bar{b}_s)\vdash^{\bar{b}_1\cdots\bar{b}_s}\tilde{F}(b_1,\cdots,b_s)$．因 $b_1,\cdots,b_s$ 与 $\bar{b}_1,\cdots,\bar{b}_s$ 不同，根据 *66 的证明可知 (b) 的证明只需对 $\bar{b}_1,\cdots,\bar{b}_s$ 而应用规则 9 (规则 12 根本不用)．今命 $\tilde{F}$ 为 $\tilde{F}(b_1,\cdots,b_s)$．合并(a)与(b)，我们得到 $\tilde{F}$ 的一个证明，在其中规则 9 与 12 的应用变元为 $\bar{u}_1,\cdots,\bar{u}_r$ (包括 $\bar{b}_1,\cdots,\bar{b}_s$)，故绝非 $z_1,\cdots,z_q$．(此外，$\tilde{F}$ 与 F 的相合亦是显然的——译者注．)

定理 15　谓词字母的代入　设 $D_1,\cdots,D_l$, E 为由不同谓词字母(1)组成的谓词字母公式．设在 $D_1,\cdots,D_l$, E 中把(1)代以(2)(当作各变元的命名式)后分别得 $D_1^*,\cdots,D_l^*$, E^*．如果 (A) 该代入是自由的，(B)对推演中含有谓词字母 $P_j(a_1,\cdots,a_{n_j})$ 的假定公式而言，$A_j(a_1,\cdots,a_{n_j})$中的潜伏自由变元是保持固定的 ($j=1,\cdots,m$)，那末：如果 $D_1,\cdots,D_l\vdash E$，则 $D_1^*,\cdots,D_l^*\vdash E^*$．

(如果在所给推演中，(2) 中所有的潜伏自由变元是保持固定的，则保留条件(B)当然满足．又当 $l=0$ 时，保留条件 (B) 无用，我们简单地有，如果$\vdash E$ 则$\vdash E^*$；只要(A)代入是自由的．)

证明　我们把所给的推演 $D_1,\cdots,D_l\vdash E$ 作为引理 8a(§24) 中的 (I)，而来找出它的 (II) 的证明．(II) 中的长公式我们写为 "F"．由保留条件(A)可知在 F 中把(1)代以(2)是自由的，再由保留条件(B)可以保证对(II)中的 y 言条件 (A2) 是满足的．因此如果我们能够证明 $\vdash F^*$，则在逆方向上应用引理 8a，便可得出 $D_1^*,\cdots,D_l^*\vdash E^*$，这便是所要证明的．

因此，试讨论所给的关于 F 的证明．在这证明内的公式中，可以出现(1)以外的谓词字母．今把(1)延长为(1′)以包括这些字母；相应地把(2)延长为 (2′)，并使用没有潜伏变元的公式作为其中的新增的命名式．

假设在所给的关于 F 的证明中我们把 (1′) 全部代以(2′)．则恰如对命题字母的代入规则处所证明的那样(§25 定理 3)，我们可

以证明其结果必是 F^* 的一个证明，但有下述的两个例外情况需行考虑.

首先，在应用规则 9 或 12 时，其中的 C 当由于代入而变成 C^* 时可能自由地含有该规则的应用变元 x，因而使得该规则不能应用. 这情形的发生只能由于该应用变元 x 是 (2) 的潜伏自由变元 $z_1, \cdots, z_q$ 之一. 这时可应用引理 17 先把对 F 的证明换成公式 $\tilde{F}$ 的证明，$\tilde{F}$ 与 F 相合并且不含有约束的 $z_1, \cdots, z_q$ 的任何一个，因此在新证明中，规则 9 及 12 的应用变元便不是 $z_1, \cdots, z_q$ 了.

其次，当应用公理模式 10 或 11 时，其中的 t 在代入后可能由于下列缘故不再对 A(x) 中的 x 为自由的：用在 t 中出现的变元构成(2)中的一些潜伏量词. 这时我们可找公式($\tilde{2}'$)，与公式($2'$)相合但不以 $\tilde{F}$ 的证明中任何公式的自由变元或约束变元作为约束变元.

现在如果在 $\tilde{F}$ 的证明中我们把($1'$)代以($\tilde{2}'$)，则上述两情况都不会发生，因此试把代入 ($\tilde{2}'$) 的运算记为“†”，则结果的公式序列将是 $\tilde{F}^\dagger$ 的一个证明. 故有$\vdash \tilde{F}^\dagger$.

由于($\tilde{2}'$)中的约束变元的选择，当在 $\tilde{F}$ 中把(1)代以($\tilde{2}$)时[1]关于自由的条件(A1)是满足的. 又因为 $\tilde{F}$ 中并不约束地含有(2)中任何的潜伏自由变元 $z_1, \cdots, z_q$，所以亦不约束地含有($\tilde{2}$)中的，故条件(A2)亦满足了. 故在 $\tilde{F}$ 中把(1)代以 ($\tilde{2}$) 是自由的. 故在 F 中把(1)代以(2)时亦然(如上所说). 故更由引理 16b 得：$\tilde{F}^\dagger$ 与 F^* 相合；由引理 15b 得 $\vdash \tilde{F}^\dagger \sim F^*$. 再利用$\vdash \tilde{F}^\dagger$ (及 *18a)，便得$\vdash F^*$，这便是所要证明的.

例 7° 我们今后将证明(§35 例 2)：

(a) $\vdash \boldsymbol{A} \vee \forall \boldsymbol{a} \boldsymbol{B}(\boldsymbol{a}) \sim \forall \boldsymbol{a}(\boldsymbol{A} \vee \boldsymbol{B}(\boldsymbol{a}))$. 故由引理 15b 得

(b) $\vdash \boldsymbol{A} \vee \forall x \boldsymbol{B}(x) \sim \forall x(\boldsymbol{A} \vee \boldsymbol{B}(x))$，这里 x 为任何变元，故由定理 15 得 (c) $\vdash A \vee \forall x B(x) \sim \forall x(A \vee B(x))$，这里 B(x) 为任何公式，A 为任何不含 x 自由的公式(否则保留条件 (A) 中的

1) ($\tilde{2}$)指($\tilde{2}'$)中对应于未延长的(2)的那一部分——译者注.

(A2)被破坏了). 这便是 *92,但须加限制条件见定理 17 所述. 由(b)容易推得 (d) $\boldsymbol{A}\vee\forall \mathrm{x}\boldsymbol{B}(\mathrm{x})\vdash \boldsymbol{A}\vee\boldsymbol{B}(\mathrm{x})$ 及 (e) $\boldsymbol{A}\vee\boldsymbol{B}(\mathrm{x})\vdash^{\mathrm{x}} \boldsymbol{A}\vee\forall \mathrm{x}\boldsymbol{B}(\mathrm{x})$. 如想把 $\boldsymbol{A}$ 代以含有自由 x 的公式 A,对 (d) 说是容许的,对(e)说则由于保留条件(B)之故而不被容许了.

代入规则的保留条件和我们关于元数学字母的约定都禁止下列情况: 同一变元既明显出现又潜伏出现. 如果不想就各个情形而陈述更详细的条件而只想用一条简单的共同的规则, 则可简单地说潜伏变元必须与明显变元不同. 这规则当然太严格而超过了必要的限制了,例如在 *92 中,即使 A 有潜伏约束的 x 显然是无害的.

附注 1 如果 Γ, E 为谓词字母公式, 由谓词字母(1)组成, 又 $\Gamma\vdash$ E, 则可找出一个由 Γ 到 E 的推演, 其中(在它的每一个公式中)除却 (1) 以外没有其它的谓词字母出现. 因为在所给的推演中,我们可把(1′)代以(2′),而(2)则和(1)一样, (2′)中的新增的命名式则只包含 (1),例如它们每一个可以是 $\forall x_1\cdots\forall x_{n_1}P_1(x_1,\cdots,x_{n_1})$.

逆代入 如果有下列情形,公式 $A(a_1,\cdots,a_n)$ 便叫做具有不同变元 $a_1,\cdots,a_n$ 的素命名式: (i) 它不具有下形之一: $A\supset B$, $A\&B$, $A\vee B$, $\neg A$, $\forall xA(x)$ 或 $\exists xA(x)$, 这里 A, B 为公式, x 为变元, $A(x)$为公式. (ii)[1]它恰巧只含有变元 $a_1,\cdots,a_n$而不含有其它变元. 两个素命名式 $A_i(a_1,\cdots,a_{n_i})$ 与 $A_j(a_1,\cdots,a_{n_j})$ 叫做不同的(作为素命名式时), 如果不管项 $t_1,\cdots,t_{n_i}$, $u_1,\cdots,u_{n_j}$ 为何,公式 $A_i(t_1,\cdots,t_{n_i})$ 与 $A_j(u_1,\cdots,u_{n_j})$ 总是不同的. 例如, $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$ 与 $0=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 是不同的,而 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$ 则不是不同的.

---

1) 从(ii)以后至本段之末, 是根据新版而译的, 初版原文如下: "(ii) 除 $a_1,\cdots,a_n$ 外它不具有其它自由变元, 而 $a_1,\cdots,a_n$ 在其中恰巧各自由出现一次. 今有两个素命名式 $A_i(a_1,\cdots,a_{n_i})$ 与 $A_j(a_1,\cdots,a_{n_j})$, 如果 $A_j(a_1,\cdots,a_{n_j})$ 不呈 $A_i(t_1,\cdots,t_{n_i})$ 形,这里 $t_1,\cdots,t_{n_i}$ 是 $a_1,\cdots,a_{n_i}$ 的某种排列 (因此 $n_i=n_j$), 则我们说这两个公式 (作为素命名式言)是不同的". 读者可注意改正前后不同处何在——译者注.

定理 16 谓词字母的逆代入 在定理 15 的同样条件下，不用保留条件(A)及(B)但要求(2)为相异的素命名式，那么便有：如果 $D_1^*, \cdots, D_l^* \vdash E^*$，则 $D_1, \cdots, D_l \vdash E$.

这可用和定理 4(§25)同样的观念而证明，同样它亦可有第二说法.

命名式的替换 应用上文(例 5 之后)所述的关于命名式的出现这个概念可把替换理论(定理 14 及 *66，参考 §33 系 2 后)表述如下：$A(x_1, \cdots, x_n) \sim B(x_1, \cdots, x_n) \vdash^{x_1 \cdots x_n} C_{A(t_1, \cdots, t_n)} \sim C_{B(t_1, \cdots, t_n)}$，只要 $A(t_1, \cdots, t_n)$ 及 $B(t_1, \cdots, t_n)$ 分别为 $A(x_1, \cdots, x_n)$ 及 $B(x_1, \cdots, x_n)$ 的作为含有 $x_1, \cdots, x_n$ 的命名式的出现.

附注 2 类似于定理 15，16 及附注 1 的结果对个体变元亦是成立的，我们只叙述下列几点. (a) 如果 $z_1, \cdots, z_q$ 为不同的变元，在 $D(z_1, \cdots, z_q)$ 及 $E(z_1, \cdots, z_q)$ 中不约束出现，又如果 $D(z_1, \cdots, z_q) \vdash E(z_1, \cdots, z_q)$，而 $z_1, \cdots, z_q$ 是保持固定的，则可以找出一个由 $D(z_1, \cdots, z_q)$ 到 $E(z_1, \cdots, z_q)$ 的推演，在其中 $z_1, \cdots, z_q$ 不约束出现. **证明**：只就 $q=1$ 及只有一变元 y 是变化的这情形而证明. 由引理 8a，$\forall$ 引(对 z)及改为一新变元 $\bar{z}$，可见 $\forall \bar{z}[\forall y D(\bar{z}) \supset E(\bar{z})]$ 是可证的. 这公式根本不含有 z. 根据谓词演算中一公式的证明的定义，凡不在该公式内的所有变元都是平等的. 因此可有一个对 $\forall \bar{z}[\forall y D(\bar{z}) \supset E(\bar{z})]$ 的证明而不含有 z. 由这公式及 $D(z)$，可由 $\forall$ 消(对 $\bar{z}$) $\forall$ 引(对 y)及 $\supset$ 消而推出 $E(z)$. (b) 设 $z_1, \cdots, z_q$ 为不同的变元，在 $D(z_1, \cdots, z_q)$ 及 $E(z_1, \cdots, z_q)$ 中不约束出现；又设 $t_1, \cdots, t_q$ 为不同的素项(即个体符号或个体变元)且全不在 $D(z_1, \cdots, z_q)$ 或 $E(z_1, \cdots, z_q)$ 内出现，除却它为 $z_1, \cdots, z_q$ 之一外. 则当且仅当 $D(t_1, \cdots, t_q) \vdash E(t_1, \cdots, t_q)$ 而 $t_1, \cdots, t_q$ 中为变元的那些保持固定时，我们有 $D(z_1, \cdots, z_q) \vdash E(z_1, \cdots, z_q)$，且 $z_1, \cdots, z_q$ 保持固定. 因为，由(a)，如果 $z_1, \cdots, z_q$，$t_1, \cdots, t_q$ 出现为所给推演中的约束变元，则可以消除，消除后如把 $t_1, \cdots, t_q$ 代以 $z_1, \cdots, z_q$ 或把 $z_1, \cdots, z_q$ 代以 $t_1, \cdots, t_q$ 则每步推论仍然成立.

§35. 等价式，对偶性，前束式

定理 17 如果 x 与 y 为不同的变元，A，B，A(x)，B(x) 与 A(x,y) 为公式，A 与 B 不含自由 x，对 *79 与 *80 言，还设 x 对 A(x,y) 中的 y 是自由的，则有：

*75. $\vdash \forall x A \sim A$.

*76. $\vdash \exists x A \sim A$.

*77. $\vdash \forall x \forall y A(x,y) \sim \forall y \forall x A(x,y)$.

*78. $\vdash \exists x \exists y A(x,y) \sim \exists y \exists x A(x,y)$.

*79. $\vdash \forall x \forall y A(x,y) \supset \forall x A(x,x)$.

*80. $\vdash \exists x A(x,x) \supset \exists x \exists y A(x,y)$.

*81. $\vdash \forall x A(x) \supset \exists x A(x)$.

*82. $\vdash \exists x \forall y A(x,y) \supset \forall y \exists x A(x,y)$.

(量词的改换)

*83°. $\vdash \exists x A(x) \sim \neg \forall x \neg A(x)$.

*84°. $\vdash \forall x A(x) \sim \neg \exists x \neg A(x)$.

(∃ 与 ∀ 的每一个通过另一个及¬而定义.)

*85°. $\vdash \neg \forall x A(x) \sim \exists x \neg A(x)$.

*86. $\vdash \neg \exists x A(x) \sim \forall x \neg A(x)$.

*87. $\vdash \forall x A(x) \& \forall x B(x) \sim \forall x (A(x) \& B(x))$.

*88. $\vdash \exists x A(x) \vee \exists x B(x) \sim \exists x (A(x) \vee B(x))$.

*89. $\vdash A \& \forall x B(x) \sim \forall x (A \& B(x))$.

*90. $\vdash A \vee \exists x B(x) \sim \exists x (A \vee B(x))$.

*91. $\vdash A \& \exists x B(x) \sim \exists x (A \& B(x))$.

*92°. $\vdash A \vee \forall x B(x) \sim \forall x (A \vee B(x))$.

*93. $\vdash \exists x (A(x) \& B(x)) \supset \exists x A(x) \& \exists x B(x)$.

*94. $\vdash \forall x A(x) \vee \forall x B(x) \supset \forall x (A(x) \vee B(x))$.

(把¬，&，∨ 移过量词之右).

*83a. $\vdash \exists x A(x) \supset \neg \forall x \neg A(x)$.

$*84a.$ $\vdash \forall x A(x) \supset \neg\exists x \neg A(x)$.

$*85a.$ $\vdash \exists x \neg A(x) \supset \neg\forall x A(x)$.

$*92a.$ $\vdash A \vee \forall x B(x) \supset \forall x(A \vee B(x))$.

(对直觉主义系统有趣的补充结果.)

$*95.$ $\vdash \forall x(A \supset B(x)) \sim A \supset \forall x B(x)$.

$*96.$ $\vdash \forall x(A(x) \supset B) \sim \exists x A(x) \supset B$.

$*97°.$ $\vdash \exists x(A \supset B(x)) \sim A \supset \exists x B(x)$.

$*98°.$ $\vdash \exists x(A(x) \supset B) \sim \forall x A(x) \supset B$.

$*99°.$ $\vdash \exists x(A(x) \supset B(x)) \sim \forall x A(x) \supset \exists x B(x)$.

$*97a.$ $\vdash \exists x(A \supset B(x)) \supset (A \supset \exists x B(x))$.

$*98a.$ $\vdash \exists x(A(x) \supset B) \supset (\forall x A(x) \supset B)$.

$*99a.$ $\vdash \exists x(A(x) \supset B(x)) \supset (\forall x A(x) \supset \exists x B(x))$.

(把量词移过⊃,并比较古典的与直觉主义的结果.)

证明 对古典系统言，可先证 *75—*94，但 *76，*78，*80，*88，*90，*92，*94 除外，如把这七条移到对偶性以后（对 *80 及 *94 还移到逆对偶关系以后）将省却一些工夫. 然后根据 *59（§27）再用 *88，*90，*92 及 *85，*86 便可以得到 *95—*99（古典地）了[1].

*75 如果我们把 A 又记为"A(x)"，因为 A 不含自由 x，故 A(t) 仍为 A(x)（§18）. 应用 ∀ 消及⊃引（或公理模式 10），∀ 引及⊃引[在 ∀ 引中 x 是固定的，因为 A(x) 不含自由 x]以及*16，我们便得到结果.

*79. 1. $\forall x \forall y A(x,y) \vdash A(x,x) \vdash^{x} \forall x A(x,x)$——双重∀消(*65) [x,x 这两项对 A(x,y) 中的 x,y 是自由的]，∀ 引.

2. $\vdash \forall x \forall y A(x,y) \supset \forall x A(x,x)$——⊃引，1[x 在 1 中是固定的，因为 $\forall x \forall y A(x,y)$ 不含自由 x].

*82. 1. $A(x,y) \vdash \exists x A(x,y) \vdash^{y} \forall y \exists x A(x,y)$——∃ 引，∀ 引.

2. $\forall y A(x,y) \vdash \forall y \exists x A(x,y)$——∀ 消，1.

1) 本书著者这样做法只讨论到古典系统方面. 至于直觉主义地证明 *76，*78，*80，*88，*90，*94*95，*96，以及 *97a—*99a 等读者可自行补做——译者注.

3. $\exists x\forall yA(x,y)\vdash\forall y\exists xA(x,y)$——$\exists$ 消，2 [$\forall y\exists xA(x,y)$ 不含 x 自由，并且在 2 中任何变元都固定，因为 y（参见 1）在 $\forall yA(x,y)$ 中不自由出现]。

4. $\vdash\exists x\forall y(x,y)\supset\forall y\exists xA(x,y)$——$\supset$引，3[在3. 中没有变元是变化的(参见 §24 引理7 b)]。

注意，如果想对*82 之逆(即把*82 的$\supset$的改为逆方向而得的)给一个相应的证明，将由于使用谓词演算的辅助推演时所受的限制而招致失败：

1. $A(x,y)\vdash\forall yA(x,y)\vdash\exists x\forall yA(x,y)$——$\forall$ 引，$\exists$ 引。

2? $\exists xA(x,y)\vdash\exists x\forall yA(x,y)$——$\exists$ 消，1. 但这是不合法的，因为 $\exists$ 消规则(与 *82 的证明中第二步所用的 $\forall$ 消规则不同)是一个辅助推演规则，因而在这里不能应用，由于在辅助推演 1 中，对被解除的假定公式 $A(x,y)$ 言变元 y 是变化的(除非 $A(x,y)$ 中不含自由 y)。

我们没有办法克服这个困难，而 *82 之逆对随意的 $A(x,y)$ 亦应该是不可证的. 在解释方面说，公式 $\exists x\forall yA(x,y)$ 意指，有一个 x 使得对每个 y 都有 $A(x,y)$；而 $\forall y\exists xA(x,y)$则是说，对每个 y 都有一个 x，不必对不同的 y 都有相同的 x，使得 $A(x,y)$. 这种区别对数学家说来是熟悉的，因由下列两者的对比可以知之：当 x 历经一区间或一变域 X 而变时，一函数序列 $a_n(x)$ 一致收敛或寻常收敛于一极限函数 $a(x)$。若用现在的逻辑符号体系，设变数 p，n 及 N 以自然数集为变域，x 以 X 为变域，则一致收敛性及寻常收敛性便可分别表示为

(i) $\forall p\exists N\forall x\forall n(n>N\supset|a_n(x)-a(x)|<1/2^p)$,

(ii) $\forall p\forall x\exists N\forall n(n>N\supset|a_n(x)-a(x)|<1/2^p)$.

*82 说一致收敛性蕴涵寻常收敛性；但其逆一般说来是不真确的，(同样，对一致连续性及寻常连续性亦然.)

要元数学地证明：$\forall \boldsymbol{b}\exists \boldsymbol{a}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})\supset\exists \boldsymbol{a}\forall \boldsymbol{b}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$在谓词演算内是不可证的，可见 §36 例 2.

*83. 1. $A(x),\forall x\neg A(x)\vdash\neg A(x)$——$\forall$ 消.

2. $A(x),\forall x\neg A(x)\vdash A(x)$.

3. $A(x)\vdash\neg\forall x\neg A(x)$——¬引，1，2[在 1 或 2 中，$\forall x\neg A(x)$ 内的变元无一是变化的].

4. $\exists xA(x)\vdash\neg\forall x\neg A(x)$——∃ 消，3[$\neg\forall x\neg A(x)$ 不含自由 x,又 3 中没有变元是变化的].

5. $\vdash\exists xA(x)\supset\neg\forall x\neg A(x)$——⊃引，4 [在 4 中没有变元是变化的].

6. $\neg\exists xA(x),A(x)\vdash\exists xA(x)$——∃ 引.

7. $\neg\exists xA(x),A(x)\vdash\neg\exists xA(x)$.

8. $\neg\exists xA(x)\vdash\neg A(x)\vdash^{x}\forall x\neg A(x)$——¬引,6,7[在 6,7 中没有变元是变的],∀ 引.

9. $\vdash\neg\exists xA(x)\supset\forall x\neg A(x)$——⊃引，8 [被解除的假定公式是 8 中的$\neg\exists xA(x)$,在其中 x 不是自由出现的].

10. $\vdash\neg\forall x\neg A(x)\supset\exists xA(x)$——换质位(*14),9.

11. $\vdash\exists xA(x)\sim\neg\forall x\neg A(x)$——& 引(*16)，5，10.

*84. 见 §34 例 1.

*87. 1. $A(x), B(x)\vdash A(x)\&B(x)\vdash^{x}\forall x(A(x)\&B(x))$——& 引，∀ 引.

2. $\forall xA(x),\forall xB(x)\vdash\forall x(A(x)\&B(x))$——∀ 消 2 次,1.

3. $\forall xA(x)\&\forall xB(x)\vdash\forall x(A(x)\&B(x))$——& 消,2.

4. $\vdash\forall xA(x)\&\forall xB(x)\supset\forall x(A(x)\&B(x))$——⊃引,3 [在 3 中任何变元都不变化，因为 x （见 1）不自由出现于 $\forall xA(x)\&\forall xB(x)$ 中].

5. $A(x)\&B(x)\vdash A(x)\vdash^{x}\forall xA(x)$——& 消,∀ 引.

6. $A(x)\&B(x)\vdash B(x)\vdash^{x}\forall xB(x)$——& 消,∀ 引.

7. $A(x)\&B(x)\vdash^{x}\forall xA(x)\&\forall xB(x)$——& 引，5，6.

8. $\forall x(A(x)\&B(x))\vdash\forall xA(x)\&\forall xB(x)$——∀ 消,7.

9. $\vdash\forall x(A(x)\&B(x))\supset\forall xA(x)\&\forall xB(x)$——⊃引，8[在 8 中任何变元都不变化，因为 x (见 7) 不自由出现于 $\forall x(A(x)\&B(x))$ 中].

10. $\vdash \forall x A(x) \& \forall x B(x) \sim \forall x(A(x) \& B(x))$——&引，4，9.

*89，*91，*93. 在上述证明中，如果把“A(x)”及“∀xA(x)”读为“A”，删去步骤 2 的一个 ∀ 消及步骤 5 的 ∀ 引，便得 *89 的证明. 如果再把 ∀ 全部换为 ∃，便得到 *91 的证明. 读者可把它写出，并核验 ∃ 消的条件是满足的. 但在 *87 的证明中以 ∃ 代 ∀ 却不容许，何故？因此我们只得 *93 而得不到其逆.

作为另一个练习，读者可试对 *92 作相应的证明，并试看怎样地由于对辅助推演所作的限制而招致失败. 有了对偶性后，*92 这结果将由 *91 推出，这是一个很有趣的例子，因这公式内不含符号¬，但不用公设 8 却不能给以证明[1].

根据 §27，*49b，由 A(x) 用量词及否定所能作出的直觉主义地不等价的公式，至多有 18(=3·2·3)个.（先用 0 个 1 个或 2 个¬，其次用 ∀x 或 ∃x，然后再用 0 个 1 个或 2 个¬.）[2]

系 下列公式表 I—IV 中每表所列的都是在古典谓词演算内互相等价的. 若在直觉主义系统内则结果如下：凡不被横线隔开的公式是彼此等价的. 每个在上面的公式都蕴涵跟在下面的公式，即由上到下的蕴涵式是可证的. 由每一公式到不被双线隔开的任一公式的蕴涵式其双重否定是可证的.（因此，若用 *49a 及 *25，其等价式的双重否定亦可证.）（海丁 [1946].）

I		II	
a.	$\forall x A(x)$	a.	$\exists x A(x)$
b.	$\neg\neg\forall x A(x)$	b.	$\exists x \neg\neg A(x)$
c_1.	$\forall x \neg\neg A(x)$	c_1.	$\neg\neg\exists x A(x)$
c_2.	$\neg\neg\forall x \neg\neg A(x)$	c_2.	$\neg\neg\exists x \neg\neg A(x)$
c_3.	$\neg\exists x \neg A(x)$	c_3.	$\neg\forall x \neg A(x)$

1) 按，如在⊃公设内加入((A⊃B)⊃A)⊃A，则 *92 可只由⊃，∨公设而推演出. 读者试自行证明——译者注.

2) 若根本不用量词还可得三公式：A(x)，¬A(x)，¬¬A(x)，但容易推得这三公式与其它 18 个公式之间的蕴涵关系——译者注.

III		IV	
a.	$\exists x \neg A(x)$	a_1.	$\forall x \neg A(x)$
b_1.	$\neg\neg\exists x \neg A(x)$	a_2.	$\neg\neg\forall x \neg A(x)$
b_2.	$\neg\forall x \neg\neg A(x)$	a_3.	$\neg\exists x \neg\neg A(x)$
c.	$\neg\forall x A(x)$	a_4.	$\neg\exists x A(x)$

表 II 在直觉主义系统中的**证明**. $\vdash \text{IIa} \supset \text{IIb}$ [*49a, *70]. $\vdash \text{IIb} \supset \text{IIc}_3$ [*85a]. $\vdash \text{IIc}_3 \sim \text{IIc}_1$ [*86]. $\vdash \text{IIc}_3 \sim \neg\forall x\neg\neg\neg A(x)$ [*49b] $\sim \text{IIc}_2$ [*86]. $\vdash \neg\neg(\text{IIc}_2 \supset \text{IIb})$ [*51b]. 同样, $\vdash \neg\neg(\text{IIc}_1 \supset \text{IIa})$. 由此，再依 *24 及 $\vdash \text{IIb} \supset \text{IIc}_1$ 及 *49a 便得 $\vdash \neg\neg(\text{IIb} \supset \text{IIa})$.

定理 18° 设 D 为一谓词字母公式，由不同的谓词字母 $P_1(a_1, \cdots, a_{n_1}), \cdots, P_m(a_1, \cdots, a_{n_m})$ 及它们的否定 $\neg P_1(a_1, \cdots, a_{n_1}), \cdots, \neg P_m(a_1, \cdots, a_{n_m})$ 只用运算子 &, $\vee$, $\forall x$ 及 $\exists x$ (对任何变元 x)组成. 则与D的否定$\neg$D 相等价的一公式 $D^\dagger$ 可用下法得到: 在D中，& 与 $\vee$ 互换，$\forall$ 与 $\exists$ 互换，每一个字母与它的否定互换.

换句话说，如果D为这样一种公式，而 $D^\dagger$ 是D经过上述的互换得来的，那末 $\vdash \neg D \sim D^\dagger$.

例 1° $\vdash \neg\exists \boldsymbol{a}(\forall \boldsymbol{b}\neg \boldsymbol{A}(\boldsymbol{b})\&(\neg \boldsymbol{B}\vee\exists \boldsymbol{c}\boldsymbol{C}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{c},\boldsymbol{b}))) \sim$
$\forall \boldsymbol{a}(\exists \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{A}(\boldsymbol{b})\vee(\boldsymbol{B}\&\forall \boldsymbol{c}\neg \boldsymbol{C}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{c},\boldsymbol{b})))$.

证明与定理 8 (§ 27) 的证明相似，不过用 *85 与 *86 来处理归纳推步中两个新情况，与前同样本定理亦有另一种说法.

系° 如果两字母公式E与F属于定理 18 中所说的形状，则当在E与F中把 & 与 $\vee$ 互换把 $\forall$ 与 $\exists$ 互换后，E与F间的等价关系仍保持旧状.

换句话说，如果E与F是这样的谓词字母公式，对E与F作上述的互换后分别得 E′ 及 F′，那末如果 $\vdash E \sim F$ 则 $\vdash E' \sim F'$. (对偶原则). 又如果 $\vdash E \supset F$，则 $\vdash F' \supset E'$. (逆对偶关系).

如前一样，本系可由本定理推得.

例 2° 由 *91 有 $\vdash A \& \exists \alpha B(\alpha) \sim \exists \alpha(A \& B(\alpha))$. 故由对偶原则有 $\vdash A \vee \forall \alpha B(\alpha) \sim \forall \alpha(A \vee B(\alpha))$. 故得 *92，见 § 34 例7.

类似地，作为 *75，*77，*87，*89 的对偶我们得 *76，*78，*88，*90，作为 *79，*93 的逆对偶我们得 *80，*94. （注意，*81 及 *82 自为逆对偶.）

定理 19° 任给一公式C，可找到一个具有下列两性质的公式 D（叫做C的前束式）. 公式C与D等价即$\vdash C \sim D$. 在D中一切量词（如果有的话）都在最前，即所有其它的逻辑符号$\supset$，&，$\vee$，$\neg$（如果有的话）都在每个量词的辖域之内（这样的公式叫做前束的）.

证明 要把一公式C化归为前束式，我们可以逐步地应用 *85，*86，*89—*92，*95—*98 而把所有量词移于逻辑符号$\supset$，&，$\vee$，$\neg$的辖域以外，而注意下列几点. 如果要应用 *89—*92 或 *95—*98，而该公式又不满足A或B不含自由 x 这个条件时，可用 *73 或 *74 而更改约束变元. 如要应用 *89—*92 而A又在符号 & 或$\vee$的另一边，可先用 *33 或 *34.（在化归到前束式的过程中本无需用到 *87，*88 或*99；但当它们可以应用时，如果应用它们可以节省步骤并得到更简单的前束式.）

要证明这过程必会终止，可用归纳法而以下列数作为归纳数：在$\supset$，&，$\vee$或$\neg$的辖域之内的量词出现个数，亦即下列的对偶的总数，该对偶的一个成员为$\supset$，&，$\vee$或$\neg$之一，另一成员为在该成员辖域之内的量词[1]. 如果这数非 0，则必可找到一对偶，在其居间的辖域内是没有别的逻辑符号的[1]. 于是便可实行化归而把这情况除去，其它则不变，这样归纳数便少 1 了.（如果应用 *87，*88 或 *99，则归纳数少 2 或更少.）

例 3° 下列各公式是依次等价的，根据右端所列的等价式而作替换便可知道. 最后一个公式便是第一公式的前束式亦是表中各公式的前束式.

1) 当然这里所说的不是逻辑符号而是它们在所给公式之内的出现——俄译注.

1. $[\neg\exists aA(a)\vee\forall aB(a)]\&[C\supset\forall aD(a)]$.
2. $[\forall a\neg A(a)\vee\forall aB(a)]\&\forall a[C\supset D(a)]$——*86,*95.
3. $\forall a[\forall a\neg A(a)\vee B(a)]\&\forall a[C\supset D(a)]$——*92.
4. $\forall a[\forall b\neg A(b)\vee B(a)]\&\forall a[C\supset D(a)]$——*73.
5. $\forall a\forall b[\neg A(b)\vee B(a)]\&\forall a[C\supset D(a)]$——*34, *92.
6. $\forall a\{\forall b[\neg A(b)\vee B(a)]\&[C\supset D(a)]$——*87.
7. $\forall a\forall b\{[\neg A(b)\vee B(a)]\&[C\supset D(a)]$——*33,*89.

§ 36. 赋值，无矛盾性

谓词演算的目的是把谓词逻辑的原则来形式体系化，这些原则对具有任何多个客体的域都有效，只要它至少具有一元素（客体）便成（§ 31）。因此如果我们明指这域的元素的个数为 k，k 为任何 $\geqslant 1$ 的整数，则一切可证公式必是真的．我们可把这观念与 § 28 处所用的相合并，那里是把真假命题抽象而得到两个算术客体 t 与 f．这便暗示了一个有穷性赋值过程，因而可以元数学地证明谓词演算的无矛盾性．

在赋值过程中，一谓词字母公式是当作它里面所含的自由个体变元及谓词字母(包括命题字母)的函数，或者当作这些以及别的自由变元及别的谓词字母的函数．因此，当我们把与命题演算中的永真性相应的那个概念加以定义后，我们便要求在演算中的可证公式就是真的，不管其中的谓词字母代表什么谓词，亦不管(由于自由个体变元的全称性解释(§ 31)）其中的自由个体变元代表域中什么样的客体．

当客体域内的不同客体个数选定为某一正整数 k 后，就赋值过程言，这些客体本身究竟是什么那是无关重要的．因此可假设它们为(或把它们叫作)数目 $1, 2, \cdots, k$．这些数目可以作为个体变元所取的值．

如前(§ 28)命题字母(即 0 元的谓词字母)取值 t 或 f．

现在考虑谓词字母．在该系统的逻辑解释之下，对任何给定

的正整数 $n>0$，具有 n 个附加变元的谓词字母与命题字母不同之点在于：它不表示一命题而表示一个 n 元的命题函数，即对于附加变元所取的每一组值它都是取一命题以为值(§ 31)．在我们的赋值过程中，既把命题换为 t 或 f，我们对一个有 n 个附加变元的谓词字母所给的值便不是 t，f 而是一个 n 元函数，其定义域为 $\{1,\cdots,k\}$ 而值域为{t,f}．恰巧有 2^{k^n} 个不同的这样的函数，它们叫做 k 客体域上的 n 元逻辑函数．我们在 $n=0$ 时所用的值 t，f 便可以看作两个($=2^{k^0}$)0 元逻辑函数．

如前，我们把 ⊃，&，∨，¬ 解释为依以前的表(§ 28)而定义的固定函数，以 {t，f} 为定义域及值域．现在我们把 ∀ 与 ∃ 解释为两个固定函数（译者按，一般叫做泛函或算子），其自变元为以域{t,f}中的元素为值的一元逻辑函数，而 ∀x 或 ∃x 中的变元 x 则表示其运算对象将看作哪个个体变元的逻辑函数．这两个固定逻辑函数(泛函)可如下定义[1]．对一个逻辑函数 A(x) 言，如果对 x 在域 $\{1,\cdots,k\}$ 中所取的每个值，A(x) 均取值 t，则 ∀xA(x) 的值为 t；否则其值为 f．如果 x 在域 $\{1,\cdots,k\}$ 中取某值时 A(x) 取值 t，则 ∃xA(x) 的值为 t，否则其值为 f．

设给定一个谓词字母公式，现在我们可以作出一表来表示该公式所代表的函数的值了，该函数是作为该公式中出现的不同自由的个体变元及谓词字母的(或这些以及别的变元及字母的)函数的．要作这个表最好先把作为谓词字母的值的那些逻辑函数排成某个固定次序并引入符号来表示它们．

例1 对 $k=2$ 言，我们试只对其中所含的自由变元及谓词字母而造谓词字母公式 $\forall a(B \supset A(a)) \vee (\neg A(b) \& B)$ 的表．因此这公式便是三元函数即 b, B 及 $A(a)$ 的函数，这里 A 是一元谓词字母，而 a 为它的命名式的附加变元(§ 31)．在开始构作这公式的表以前，我们要先引入一元逻辑函数的记号，这些函数是用来作为变元 $A(a)$ 的值的．因为 $k=2$，所以这些函数共有 $4(=2^{2^1})$

1) 下列说法更觉清楚：∀，∃ 为两个固定泛函，以逻辑函数为变目，以 {t，f} 为值域．而 $\forall xA(x)=\forall\lambda xA(x)$，$\exists xA(x)=\exists\lambda xA(x)$($\lambda$ 符号见§10)——译者注．

个，$\mathfrak{l}_1(a)$，$\mathfrak{l}_2(a)$，$\mathfrak{l}_3(a)$，$\mathfrak{l}_4(a)$，可由它们的值表而确定于下.

两客体域上的一元逻辑函数

自变元之值	各函数的相应值			
a	$\mathfrak{l}_1(a)$	$\mathfrak{l}_2(a)$	$\mathfrak{l}_3(a)$	$\mathfrak{l}_4(a)$
1	t	t	f	f
2	t	f	t	f

所给的公式的表便如下(后面就一例而举出其值的计算法).

各自变元之值			函数的相应值
b	B	$A(a)$	$\forall a(B \supset A(a)) \vee (\neg A(b) \& B)$
1	t	$\mathfrak{l}_1(a)$	t
1	t	$\mathfrak{l}_2(a)$	f
1	t	$\mathfrak{l}_3(a)$	t
1	t	$\mathfrak{l}_4(a)$	t
1	f	$\mathfrak{l}_1(a)$	t
1	f	$\mathfrak{l}_2(a)$	t
1	f	$\mathfrak{l}_3(a)$	t
1	f	$\mathfrak{l}_4(a)$	t
2	t	$\mathfrak{l}_1(a)$	t
2	t	$\mathfrak{l}_2(a)$	t
2	t	$\mathfrak{l}_3(a)$	f
2	t	$\mathfrak{l}_4(a)$	t
2	f	$\mathfrak{l}_1(a)$	t
2	f	$\mathfrak{l}_2(a)$	t
2	f	$\mathfrak{l}_3(a)$	t
2	f	$\mathfrak{l}_4(a)$	t

我们今试计算它的第二位（表的第二行）. 为此，当我们处理到 $\forall$ 运算时我们须使用到 B 取值 t 而 $A(a)$ 取值 $\mathfrak{l}_2(a)$ 时的 $B \supset A(a)$ 的表. 我们先算出这个表(它的计算法见下).

自变元之值	函数的相应值
a	$t \supset \mathfrak{l}_2(a)$
1	t
2	f

由上面已经给出的 $\mathfrak{l}_2(a)$ 的表以及 § 28 的⊃表而计算这个辅助表的两值，其法如下：

$$\begin{array}{ll} t\supset \mathfrak{l}_2(a) & t\supset \mathfrak{l}_2(a) \\ t\supset \mathfrak{l}_2(1) & t\supset \mathfrak{l}_2(2) \\ t\supset t & t\supset f \\ t & f \end{array}$$

现在回到我们原来的问题，计算 $\forall a(B\supset A(a))\vee(\neg A(b)\&B)$ 的表中的第二行，亦即当 b 取值 1，B 取值 t，而 $A(a)$ 取值 $\mathfrak{l}_2(a)$ 时该公式的值．我们如下开始．

$$\forall a(B\supset A(a))\vee(\neg A(b)\&B)$$

$$\forall a(t\supset \mathfrak{l}_2(a))\vee(\neg \mathfrak{l}_2(1)\&t)$$

因为 $t\supset \mathfrak{l}_2(a)$ 的表的值列中并非全是 t，所以根据所给的关于 ∀ 的解释，可把 $\forall a(t\supset \mathfrak{l}_2(a))$ 换为 f，同样由 $\mathfrak{l}_2(a)$ 的表可把 $\mathfrak{l}_2(1)$ 换为它的值 t，故得

$$f\vee(\neg t\&t)$$

$$f\vee(f\&t)$$

$$f\vee f$$

$$f$$

读者可计算 $\forall a(B\supset A(a))\vee(\neg A(b)\&B)$ 的表中其它的值以核验他对这计算过程的理解程度．当然，经常有好些捷径可用以确定某一公式的表而不必分别地对表中的每一值都要实行各别的计算(例如，我们可立刻看出当 B 为 f 时所有八值均为 t)．但这个计算可以说明对一个给定的正整数 k 言，一个谓词字母公式所表示的函数的基本概念．

如果对一个给定的 k 言，当一个谓词字母公式作为其中所含的一切自由变元及谓词字母的函数时，其表的值列只含有 t，我们便说这公式是 k 永真或在 k 客体域内有效．如果其值列含有一些 t，我们便说这公式在 k 客体域内可满足．

如前 (§ 28)，如果对于自由变元及谓词字母的最小可能的表言，一公式是 k 永真的(在 k 客体域内可满足的)，则对于自由变元

及谓词字母的任何其它表言亦然；逆理亦真．因此以后亦不必标明这个表了．

今有两个谓词字母公式，如果当作在两者任一之中出现的自由变元及谓词字母（或者还有其它）的函数时，它们的表的值列是一样的，那末这两公式便叫做 k 永等的．

定理 20 对每个固定的正整数 $k(k \geqslant 1)$ 言：一谓词字母公式 E 在谓词演算中是可证的（或可由 k 永真公式 Γ 推演出的），其必要条件是：E 是 k 永真的．

证明 这定理可由两引理而证得，这两引理相当于定理 9 的那两引理，不过现在所提到的却是谓词演算的公设表，谓词字母公式及 k 永真．上面对群 A1 的公设所作的推理基本上可以在这里使用，至于群 A2 的四条公设我们现在只列出关于其中两条的处理．

公理模式 10 根据这模式而得的任一公理都呈 $\forall x A(x) \supset A(t)$ 形，对纯谓词演算言这里的项 t 只是一个变元，而这变元 t 对 A(x) 中的 x 言是自由的．

变元 t 可与 x 相同亦可不同，x 可自由出现于 A(x) 中亦可不自由出现于 A(x) 中．

我们必须证明，对出现于 $\forall x A(x) \supset A(t)$ 中的谓词字母不管指派以怎样的逻辑函数作为值，对出现于其中的自由变元不管指派以客体 $1, \cdots, k$ 中那一个作为值，结果 $\forall x A(x) \supset A(t)$ 均取值 t．

今考虑某一个特殊的指派．如果所指派的值已经派给 A(x) 中各谓词字母以及各自由变元了，但对 x 却未曾指派（如果 x 自由出现于 A(x) 的话），那末 A(x) 便是变元 x 的一个逻辑函数（不管 x 自由出现于 A(x) 或否）．

因为 t 对 A(x) 中的 x 是自由的，故在 A(t) 这个符号序列中 t 的自由出现所在，恰恰就是在 A(x) 中 t 或 x 的自由出现所在．因此当把指派给 t 的值也指派给 x 时，A(x) 所表示的逻辑函数所取的值恰巧便是在我们所考虑的指派下 A(t) 所取的值．

可以分两种情况.

情形 1 A(x)所表示的逻辑函数只取 t 为值.那末,A(t) 的值本是这些值之一,必亦取 t. 因此由⊃的赋值表(§ 28)可知 ∀xA(x)⊃A(t) 有值 t.

情形 2 A(x) 所表示的逻辑函数在其值列中有些为 f. 那末由 ∀ 的赋值过程的定义，公式 ∀xA(x) 取值 f；这时 ∀xA(x)⊃A(t)仍取值 t.

规则 12 前提是 A(x)⊃C,结论是 ∃xA(x)⊃C,其中 C 不含自由 x.

我们已有题设,不管指派那一个逻辑函数作为 A(x)⊃C 中所出现的谓词字母的值,不管指派客体 1,…,k 中那一个作为其中自由变元的值,结果 A(x)⊃C 均取值 t. 我们必须证明 ∃xA(x)⊃C 亦然.

今考虑对 ∃xA(x)⊃C 的某一个特殊的指派，恰巧对其中所含的自由变元及谓词字母而指派的. 因为 ∃xA(x)⊃C 不含自由 x,故对 x 并没有指派.

现在如把所指派的值派给 A(x) 中的谓词字母及自由变元,但不派给 x(如果 x 自由出现于 A(x))，则 A(x) 表示变元 x 的一个逻辑函数.

情形 1 A(x) 所表示的逻辑函数在它的值列中有些 t. 选取相应于这些 t 之一的一个 x 值;今考虑所给的对 ∃xA(x)⊃C 的指派再加上这个 x 值使作为对 A(x)⊃C 的一个指派. 这时 A(x)便有值 t;由假设,A(x)⊃C 有值 t; 故由⊃的赋值表,C 具有值 t. 但 C 不含自由 x,所以 C 的这个值必是根据对 ∃xA(x)⊃C 的指派而得,与 x 无关. 因此由⊃的赋值表可知对所作的指派言,∃xA(x)⊃C 取值 t.

情形 2 A(x) 所表示的逻辑函数只取 f 为值. 这时 ∃xA(x) 有值 f;故 ∃xA(x)⊃C 有值 t.

例 1(续完) $\forall a(\boldsymbol{B}\supset\boldsymbol{A}(a))\vee(\neg\boldsymbol{A}(b)\&\boldsymbol{B})$ 不是 k 永真的，因为其值列中含有 f. 因此在谓词演算中它不是可证的.

例 2 当 $k=2$ 又当 $A(a, b)$ 取下列逻辑函数 $\mathfrak{l}(a, b)$ 为值时；$\mathfrak{l}(1, 1)=\mathfrak{l}(2, 2)=\mathfrak{t}$，$\mathfrak{l}(1, 2)=\mathfrak{l}(2, 1)=\mathfrak{f}$，则公式 $\forall b\exists aA(a,b)\supset\exists a\forall hA(a,b)$ 取值 $\mathfrak{f}$，故它不是可证的.

系 1 对每个整数 $k\geqslant 1$ 言，两谓词字母公式 E 与 F 为等价的必要条件是：它们为 k 永等，即如果$\vdash$E ～ F，则 E 与 F 为 k 永等。

例 3 当 $k=2$，而 $\mathfrak{l}_1(a)$，$\mathfrak{l}_2(a)$，$\mathfrak{l}_3(a)$，$\mathfrak{l}_4(a)$ 同例 1，则对于定理 17 系中的 I—IV 各表中第一个公式（下文改用一个特殊变元及一个特殊的谓词字母来书写）便得下表. 因此这四个公式之中任何两个都不是等价的.

$A(a)$	$\forall aA(a)$	$\exists aA(a)$	$\exists a\neg A(a)$	$\forall a\neg Aa$
$\mathfrak{l}_1(a)$	$\mathfrak{t}$	$\mathfrak{t}$	$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{f}$
$\mathfrak{l}_2(a)$	$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{t}$	$\mathfrak{t}$	$\mathfrak{f}$
$\mathfrak{l}_3(a)$	$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{t}$	$\mathfrak{t}$	$\mathfrak{f}$
$\mathfrak{l}_4(a)$	$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{t}$	$\mathfrak{t}$

系 2 谓词演算是（简单）无矛盾的，即没有公式 A 使得既$\vdash$A 又$\vdash\neg$A.

证明 如果 A 是谓词字母公式，则对于每个 k，A 与$\neg$A 不能同是 k 永真的.（这里只须对随便一个固定 k 而证明本定理便够了. 希尔伯特与阿克曼[1928]原来的证明是就 $k=1$ 而作的.）就其它意义的公式言，无矛盾性可根据逆代入规则（§ 34 定理 16）而推得.

*§ 37. 集论式的谓词逻辑，k 变换

对一个给定的有限数 k 而言，在赋值过程中所用的逻辑函数是有穷的客体，意指每个函数都可由具有有限个值的表而表示.

对具有无穷多个元素的客体域言，n 元逻辑函数的概念仍可

同样叙述（但却有一点不同，即该函数不再能由有限的表来描述了）．这样我们便可以在一个给定的非空客体域上定义有效性和可满足性这两个观念．显然它们只与客体域的基数有关而与元素本身无关．

然后，依定理 20 的证明那样推理，我们可证每个可证的谓词字母公式必在每个非空客体域内是有效的．若就无穷领域而作证明，则所用的推理便不再是有穷性的．非有穷性的步骤出现于，比如说，处理公理模式 10 时，这时我们要分别两个情况，依某个函数的值全是 t 或有些值是 f 而定，但这时有无穷多个值须待考虑．这便对无穷集而使用排中律了（§ 13）．的确，对无穷领域以及含有具 $n>0$ 个附加变元的谓词字母的公式而言，有效性概念本身便是非有穷性的了．因为它要求当该谓词字母取一切 n 元逻辑函数以为值时，某一函数(按即该公式所表示的函数——译者)的值永是 t；但这样的逻辑函数集是不可数的，因此这只能在完备无穷的用语下才是可想像的(如我们通常所想像的那样)．

因此，说谓词演算的每个可证字母公式都是在每个非空客体域内普遍有效的，这结果并不能属于元数学．它宁可属于所谓集论式的谓词逻辑中（希尔伯特-伯尔奈斯[1934]，p.125），后者和元数学一样以逻辑形式体系作为研究的对象，但不同点在于：它的研究不限于只用有穷性的方法．因为我们主要是从事于元数学的研究，所以超元数学（extra metamathematical）的概念以及集论式的谓词逻辑的结果对我们只有权宜性的（heuristic）价值，即它们可暗示我们，在元数学内可以希望发现一些什么东西．

我们所以能够证明了谓词演算的无矛盾性（定理 20 系 2）是由于下列事实，我们能够对演算中的公式作一个有穷性的解释，即解释为在一个固定的有穷域内的有效性(即 k 永真性)．但这并不相应于谓词演算的通常解释，后者宁可是相应于在任意一个非空域内的有效性．

有一个集论式结果是，每个可证公式都是在每个非空域内有效的，根据这结果我们可以权宜地（heuristically）看出，即使把定

理 20 所给的必要条件全体合并起来，即对每个有穷 k 都是 k 永真的，亦不足以得出可证性.

这可由下事实推出，我们可以用谓词字母公式来表示一组关于集合D的形式公理，这组公理要求D的元素是无穷多的（参见§8). 为要描述这观念，我们先把这些公理写成我们的逻辑符号体系中的三个公式，但用谓词符号<来暗示它们是关于次序关系的公理：

$$\neg a < a,\ a < b \& b < c \supset a < c,\ \exists b(a < b).$$

当元素域为自然数集，而<是自然数之间的通常次序关系时，这些次序性质是被满足的（在古老的直觉意义下，§8). 容易看见，它们不能被任何有穷的非空元素集所满足.（读者可详细证明之.）

今把这公理系统表示为一个谓词字母公式，以 $A(a,b)$ 代 $a < b$，并且只用约束变元：

$$\forall a \neg A(a,a) \& \forall a \forall b \forall c[A(a,b) \& A(b,c) \supset A(a,c)] \& \forall a \exists b A(a,b).$$

这个公式可叫做"F"，对任何有穷 $k > 0$ 言，在 k 客体域内它都不被满足（在新的集论意义下)，但在可数的自然数域内它却是被满足的. 因此，对任何有穷 $k > 0$ 言，它的否定¬F 便在 k 客体域内有效，即 k 永真，但在可数域内却不是有效的. 因此¬F满足定理 20 中所有必要条件的全体，但根据集论结果，每个可证公式都必须在每个非空域内是有效的，因此¬F 在谓词演算内是不能证明的. 这个 ¬F 例子以及别的例子可见于希尔伯特-伯尔奈斯[1934]，pp. 123—124.

应用集论的解释，谓词演算的完备性应指，凡是在每个非空域内有效的每个谓词字母公式都是可证的. 这个解释不是有穷性的，和命题演算的相应解释不同(§28，§29)，因此谓词演算的完备性问题是不属于元数学的. 这些附注暗示给我们，当我们讨论完备性问题以及判定问题时，情况将不像命题演算处那样简单. 在后面有关于谓词演算的那一章（第十四章）中，我们将回到这些问题上来，并给出一些结果，部分地是元数学的，部分地却是集论性

的.

为后面的引用起见，我们把现在的结论综合为一定理及一系，我们标以字母“c”，表示它们并不在元数学定理的系列内，只是靠了非有穷性的古典方法才证明了的．对于这种谓词逻辑虽则我们用“集论式”一词，但其中有些结果只在古典数论的水平上．例如，在完全普遍的形式下，尽管定理 21 包含了任意高的基数的集，但其系却可由定理21的特例推论而得，即在定理 21 中只须提到可数的自然数集以及可数的逻辑函数集（即对<而应用逻辑符号时所能表示的函数集）便成了（这里，$\boldsymbol{a} < \boldsymbol{b}$ 之为 t 或 f 视 $\boldsymbol{a}$ 是否一个较 $\boldsymbol{b}$ 小的自然数而定.）

定理 21[c] 对每个非空客体域言，谓词演算中每个可证的（或由有效公式推演出的）谓词字母公式都是有效的.

系[c] 要使得一个谓词字母公式在谓词演算中可证，（一般说）对每个正整数 k 言它都是 k 永真的一事是不够的.

∀，∃ 与 &，∨ 间的相似 当在 k 个客体 1，···，k 的有穷域内作解释时，公式 ∀xA(x) 与 A(1)&···&A(**k**) 同义，∃xA(x) 与 A(1)∨···∨A(**k**) 同义，这里 1，···，**k** 为这些客体在该形式体系中的名．这便暗示了对前段结果的一个稍为不同的处理，由这我们并得一个自身颇为有趣的中间的元数学结果．（当 $k = 2$ 时参看希尔伯特-阿克曼 [1928]，p. 66—68.）

我们取形式表达式 0′，0″，···，0′···′（最后一个有 k 个撇）作为 1，2，···，**k**，叫做由 1 到 **k** 的数字．（但是，用 k 个个别符号亦可以.）

今定义 k 个个体的谓词字母公式或简称 k 谓词字母公式如下，在§ 31 的谓词字母公式的定义中，句 1 除变元外现在还包括由 1 到 **k** 的数字；使用这种公式概念的谓词演算我们叫做 k 个个体的谓词演算或简称 k 谓词演算.

至于 k 命题字母公式可如下定义，不含自由或约束变元的 k 谓词字母公式（因此没有量词）；或者等价地如下定义，在命题字母公式（§ 25）的定义的句 1 中所指的公式，不但包括命题字母，还包

括把由 1 到 $\mathbf{k}$ 的数字代入谓词字母的每个附加变元时所得到的表达式，例如，当 $k=2$ 时，$\boldsymbol{A}(1)$，$\boldsymbol{A}(2)$，$\boldsymbol{B}(1)$，$\boldsymbol{A}(1,1)$，$\boldsymbol{A}(1,2)$，$\boldsymbol{A}(2,1)$.

我们可以为方便起见而把后者分别缩写为"$\boldsymbol{A}_1$"，"$\boldsymbol{A}_2$"，"$\boldsymbol{B}_1$"，"$\boldsymbol{A}_{11}$"，"$\boldsymbol{A}_{12}$"，"$\boldsymbol{A}_{21}$"，因此结果不过在命题字母表中，增加一些同形状的字母而具有有限多个正整数足码 $\leqslant k$ 罢了. 我们以前的纯命题演算的理论显然仍可使用，如果当两个字母或者本身不同或者足码不同时便当作不同的命题字母的话.

给出一个闭的 k 谓词字母公式，它的 k 变形式是指由下法得出的 k 命题字母公式，即继续地把它的每个形为 $\forall x A(x)$ 的部分（$A(x)$ 为 k 谓词字母公式）都换为 $A(1)\&\cdots\&A(\mathbf{k})$，每个形为 $\exists x A(x)$ 的部分都换为 $A(1)\vee\cdots\vee A(\mathbf{k})$，直到所有的量词都消除完毕为止. 容易看见，替换的次序并不影响结果.

例 1 $\forall b\exists a\boldsymbol{A}(a,b)\supset\exists a\forall b\boldsymbol{A}(a,b)$ 的 2 变形式是 $(\boldsymbol{A}(1,1)\vee\boldsymbol{A}(2,1))\&(\boldsymbol{A}(1,2)\vee\boldsymbol{A}(2,2)\supset(\boldsymbol{A}(1,1)\&\boldsymbol{A}(1,2))\vee(\boldsymbol{A}(2,1)\&\boldsymbol{A}(2,2))$ 或简单地为

$$(\boldsymbol{A}_{11}\vee\boldsymbol{A}_{21})\&(\boldsymbol{A}_{12}\vee\boldsymbol{A}_{22})\supset(\boldsymbol{A}_{11}\&\boldsymbol{A}_{12})\vee(\boldsymbol{A}_{21}\&\boldsymbol{A}_{22}).$$

给定一个 k 谓词字母公式 $A(x_1,\cdots,x_n)$ 恰巧具有不同的自由变元 $x_1,\cdots,x_n$，则它的 k 变形式集是指把 $A(x_1,\cdots,x_n)$ 中的 $x_1,\cdots,x_n$ 代以由 1 到 $\mathbf{k}$ 的数字 n 元序组（共 k^n 个）所得到的 k^n 个闭 k 谓词字母公式，再作其 k 变形式所得的集.

例 2 $\forall a\boldsymbol{A}(a,c)\supset\boldsymbol{A}(b,c)$ 的诸 2 变形式是：$\boldsymbol{A}_{11}\&\boldsymbol{A}_{21}\supset\boldsymbol{A}_{11}$，$\boldsymbol{A}_{12}\&\boldsymbol{A}_{22}\supset\boldsymbol{A}_{12}$，$\boldsymbol{A}_{11}\&\boldsymbol{A}_{21}\supset\boldsymbol{A}_{21}$，$\boldsymbol{A}_{12}\&\boldsymbol{A}_{22}\supset\boldsymbol{A}_{22}$

定理 22 对每个 $k\geqslant 1$：如果一公式 E 在纯或 k 谓词演算中是可证的（可由公式 Γ 推演出的），则 E 的所有 k 变形式在命题演算中都是可证的（都可由公式 Γ 的 k 变形式推演出）.（希尔伯特-伯尔奈斯 [1934]，第119 页以后）

证明让诸读者.

容易看见，一谓词字母公式为 k 永真，当且仅当所有它的 k 变形式都是永真（§ 28），因此根据定理 9，定理 20 便成定理 22 的系

了.

例 1(续完) 在命题演算中,下公式 $(\boldsymbol{A}_{11}\vee\boldsymbol{A}_{21})\&(\boldsymbol{A}_{12}\vee\boldsymbol{A}_{22})\supset(\boldsymbol{A}_{11}\&\boldsymbol{A}_{12})\vee(\boldsymbol{A}_{21}\&\boldsymbol{A}_{22})$ 不是可证的,因为当 $\boldsymbol{A}_{11}, \boldsymbol{A}_{12}, \boldsymbol{A}_{21}, \boldsymbol{A}_{22}$ 分别取值 t, f, f, t 时它取值 f. 因此在谓词演算中 $\forall b\exists a A(a,b)\supset\exists a\forall b A(a,b)$ 是不可证的. 试把这里 $\boldsymbol{A}_{11}, \boldsymbol{A}_{12}, \boldsymbol{A}_{21}, \boldsymbol{A}_{22}$ 所取的值与 § 36 例 2 中 $\mathfrak{l}(a, b)$ 的表作比较,可见这里和那里基本上作了同样的反驳.

例 3 在直觉主义谓词演算中 $\neg\neg\exists a A(a)\supset\exists a\neg\neg A(a)$ (这属于定理 17 系中 $\mathrm{IIc}_1\supset\mathrm{IIb}$ 的形状)是否可证的? 根据定理 22 (当 $k=2$ 时) 这必须 $\neg\neg(\boldsymbol{A}_1\vee\boldsymbol{A}_2)\supset\neg\neg\boldsymbol{A}_1\vee\neg\neg\boldsymbol{A}_2$ 在直觉主义命题演算中是可证的(这结果将在 § 80 中用到).

在研究谓词演算时通常都权宜地 (heuristically) 把 $\forall x A(x)$ 当作对客体域中所有元素而作的合取,把 $\exists x A(x)$ 当作析取,尽管只对具有给定的 k 个元素的有限域的情况言才能造出同意义的形式表达式. 由于 $\forall$, & 之间、$\exists$, $\vee$ 之间有这种类似性,又由于 & 类似于·, $\vee$ 类似于+的观念 (§29 末), 所以有些作者把 $\forall x A(x)$ 写作"$\Pi_x A(x)$",把 $\exists x A(x)$ 写作"$\sum_x A(x)$". (又比较一集之集的积与和的定义, §5. 按: 即交与并——译者.)

试回顾一下,可见对 & 与 $\vee$ 的公设 3—6 如何暗示了关于 $\forall$ 及 $\exists$ 的公设. 群 A2 的实际公设便是这种类似性所要求的,但容许有一些细节上的差异. 在定理 2 的导出规则中其类似性也是显著的. 例如, *75, *76, *83, *84, *91, *92 便分别类似于 *37, *38, *56, *57, *35, *36.

以代入规则为公设的谓词演算 和命题演算的情形一样(§30),谓词演算亦可不用导出的代入规则而用公设的代入规则来表述,若用 §34 定理 15 的记号并要求保留条件 (A),该规则便如下:

$$\frac{\mathrm{E}}{\mathrm{E}^*}$$

这时谓词字母便叫做谓词变元; 这规则经常理解为每一次应用于一变元; 和从前一样,在辅助推演中这些变元必须对被解除的假定

公式言是保持固定的[1]．（代入规则的第一次精确的陈述似是希尔伯特-伯尔奈斯[1939]，377—378 页或[1934]，98 页，但须理解：关于“代入”所作的限制对“改名”亦适用．）

n 值谓词演算　参见罗歇与屠尔凯[1948—51]，1952.

多种类谓词演算　如在 §31 中所曾指的，谓词演算亦可就多种客体域而定论，有些变元便明指以这些变域中之一为变域，别的变元则以别域为变域等等．如果这几种客体域是当作客体的几种不同的基本范畴的，则这演算的新面貌不外是，没有任何运算能够把某一种类的项或变元，即指某一变域而言的项或变元，来代入别一种类的项或变元处去．例如，只当 x 与 y 为同种类的变元时，*79 才成立．命名式中每一个附加变元都应属于一个明指的种类．（参见厄勃朗[1930]，史密特（Schmidt）[1938]，王浩[1952]及 §74 例 13.）

高层谓词演算　但是亦可用下法而得到具有几种类型的变元的谓词演算，即先从具一个原始客体域（叫做个体域）的谓词演算

---

1) 本句从“和从前一样……”起，俄译者认为不够精确，因此更改如下（作为正文）：“把具有元数学变元 A，B，C，x，t，A(x)的公理模式改用相应于这些模式的具形式变元 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{C}$，$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{a})$ 的具体公理．此外再假设客体变元的代入规则，根据它，代入便可以在所给公式内自由出现处进行，如 §18 所写的，并且只要代入是自由的它便是合法的（§18）．这时在公理 10 与 11 中可选取某个固定的个体变元，例如 $\boldsymbol{b}$ 作为 t．在公设 9—12 中，x 处处都表示一个固定的约束变元 $\boldsymbol{x}$，为此我们又假设（应用于一个量词的变元及辖域）§33 的约束变元的改名规则．这系统的公理个数是有穷的”．

俄译者再补入脚注如下．

要由上面所论的谓词演算改换为这种形式的谓词演算，可用第四章定理 3 的方法而得（预先把公式 $A_1,\cdots,A_m$ 中的 x 更换）．反之，（要由这形式改换为上面所论的形式——译者）其法如下．对规则 9 与 12 言（如果 x 与 $\boldsymbol{x}$ 不同）：设应用规则 9 或 12 时其前提的证明长度为 $n+1$，并设当前提的证明的长度 $\leqslant n$ 时已经证明了这应用可以转入具公设的代入规则的谓词演算内；今若在所给应用规则 9 及 12 时的前提中，把变元 $\boldsymbol{x}$ 换为随便别的变元 v，但须不出现于证明之内的．对于这样而得的前提在具公设的代入规则的谓词演算内是有证明的（即首先利用改名规则在前提内把 $\boldsymbol{x}$ 的约束出现除去，其次使用客体变元代入规则把 v 代入 $\boldsymbol{x}$ 处）．然后把 x 代以 $\boldsymbol{x}$，并就变元 $\boldsymbol{x}$ 相应使用规则 9 或规则 12，再使用约束变元的改名规则及客体变元代入规则，来恢复原来所给应用规则 9 或规则 12 时的约束变元及自由变元的结论，我们便对于所给的具长度 $n+1$ 的推演的结论而在具公设的代入规则的谓词演算内得到了其证明了．

出发;其次以第一客体域上的谓词作成新客体域,这样便容许量词 $\forall P, \exists P$,而 $P(a_1, \cdots, a_n)$为第一系统内的谓词变元;等等. 当我们考虑根据这计划而构成的谓词演算谱系时,第一个叫做狭义谓词演算或第一层谓词演算,别的叫做第二层,第三层谓词演算等,一般叫做高层谓词演算. 考虑这样一种的系统的谱系时发生了好些困难问题,被逻辑主义学派(§12)所研究着. 简单的引论可见于希尔伯特-阿克曼[1928]的第二版(1938)或第三版(1949)中的第四章. 在邱吉[1956]的第五章(第一卷)讨论了二层谓词演算,邱吉还准备在他所计划的第二卷第六章内讨论更高层的谓词演算.

第八章 形式数论

§ 38. 归纳,相等性,替换

在本章内我们转而讨论第四章的完全形式系统.

今后我们把各结果主要地用特殊的形式变元来叙述，如群 B 的公设那样(公设 13 以后),因此可证公式便是数论中的一些特殊定理而在本系统的符号系统中加以形式化的. 由于有个体变元的代入规则(§23 及 §32,*66)的缘故，凡用特殊自由变元叙述的形如$\vdash$A 的结果,其中的自由变元均可用项来代入.

由公设 13(用$\supset$引,$\forall$ 引, & 引及$\supset$消)，我们有下列的关于数学归纳法的形式规则. 根据这条规则而作的形式归纳当然根本与在证明元数学定理时所用的非形式数学归纳法毫不相干.

归纳规则 设 x 为一变元，A(x) 为一公式，Γ 为一列不含自由 x 的公式. 如果 $\Gamma\vdash$A(0), 又 Γ, A(x)$\vdash$A(x′), 其中自由变元对 A(x) 言是保持固定的,那末 $\Gamma\vdash$A(x)[1].

从下定理的证明起,对于形式可证性或可推演性的证明,我们常常采用更加非形式的表示. 在处理等价性时上面所用的链方法(§26)便是这种趋向的一个开端. 现在更进一步,在很多情形中我们都把符号“$\vdash$”省去. 因此，我们说“假设 A”，意指我们想用 A 作一个假定公式以构造一推演. 当然，严格说来我们并没有假设什么,只不过指明后面的公式是形式地由 A(及我们已经引入的其它假定公式)推演出的,直到文中指出或暗中指出假定公式 A 被解除为止. 在这样的非形式表示的每一步骤中,所给出的公式是理解为由所有一切尚未被解除的假定公式而推演出来的.

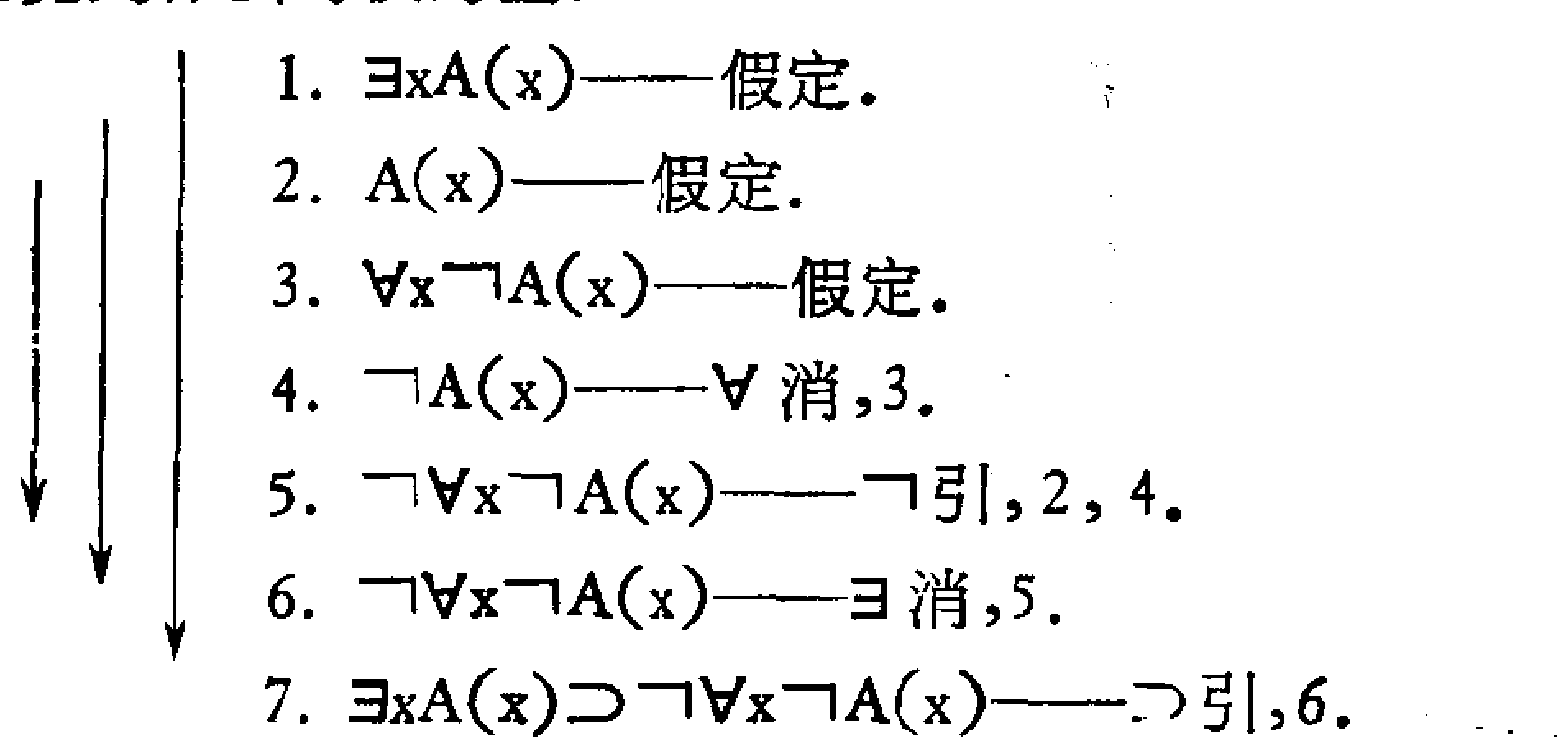
---

1) 显然 x 对 Γ 中每一公式都保持固定. 如果不要求 Γ 的每一公式都不含自由 x，则一般地有 $\Gamma\vdash^{x}$A(x)——俄译注.

例 1 下面使用这个表示法来表示 $\vdash \exists x A(x) \supset \neg \forall x \neg A(x)$ 的证明(参看 §35*83 的证明的前半).

由于要使用⊃引,故假设 $\exists x A(x)$. 又想由此再使用∃消,故又假设 $A(x)$. 我们又想使用反证法(即¬引)而推演出 $\neg \forall x \neg A(x)$,因此我们假设 $\forall x \neg A(x)$. 于是由∀消得 $\neg A(x)$,与 $A(x)$ 相矛盾. [因此由¬引得 $\neg \forall x \neg A(x)$,而这便解除了假设 $\forall x \neg A(x)$. 因为 $\neg \forall x \neg A(x)$ 不含自由 x,故现在可以完成∃消而解除了 $A(x)$. 最后由⊃引得 $\exists x A(x) \supset \neg \forall x \neg A(x)$,解除了 $\exists x A(x)$.]方括号内的步骤通常是不必明说的.

要分析这个推演,我们列出各公式,用箭头指出各假设的有效性究竟到什么时候为止.



1. $\exists x A(x)$——假定.
2. $A(x)$——假定.
3. $\forall x \neg A(x)$——假定.
4. $\neg A(x)$——∀消,3.
5. $\neg \forall x \neg A(x)$——¬引,2,4.
6. $\neg \forall x \neg A(x)$——∃消,5.
7. $\exists x A(x) \supset \neg \forall x \neg A(x)$——⊃引,6.

就每个公式言,都可由箭头延伸到该处的那些假定公式而推演出,例如,第 5 行意指 $\neg \forall x \neg A(x)$ 可由 $\exists x A(x)$(第一行)及 $A(x)$(第二行)推演出. 如果用⊢记号表示,我们的证明便是以前的样式了.

1. $\exists x A(x) \vdash \exists x A(x)$.
2. $A(x), \exists x A(x) \vdash A(x)$.
3. $\forall x \neg A(x), A(x), \exists x A(x) \vdash \forall x \neg A(x)$.
4. $\forall x \neg A(x), A(x), \exists x A(x) \vdash \neg A(x)$——∀消,3.
5. $A(x), \exists x A(x) \vdash \neg \forall x \neg A(x)$——¬引,2,4.
6. $\exists x A(x) \vdash \neg \forall x \neg A(x)$——∃引,5.
7. $\vdash \exists x A(x) \supset \neg \forall x \neg A(x)$——⊃引,6.

注意，列出假定公式的各行便相当于各箭头. 为第 5 步的使用起见，亦可以根据$\vdash$的一般性质把 $\forall x\neg A(x)$ 作为 2 中的新增假定公式. 在第 6 步时，$\exists$ 消结果本来得出 $\exists xA(x), \exists xA(x) \vdash \neg\forall x\neg A(x)$,但由$\vdash$的一般性质我们把重复的 $\exists xA(x)$ 省去了. 实际上对 2—5 说，是否把 $\exists xA(x)$ 当作一个假定公式那是无关重要的.

使用$\vee$消规则时经常使用“穷举”字样来描述(参看 §23). 使用形式归纳规则时经常如下表示，和非形式归纳的用语同样(§7): 奠基. …A(0). 归纳推步. 假设 A(x) (归纳假设)故…故 A(x′). [到这里归纳推步便完成，而 A(x) 不再作为假定公式.]故 A(x). [其它的公式 Γ 可以从头到尾作为假定公式. 这种对 $\vdash$A(x) 或 $\Gamma\vdash$A(x) 的证明叫做“就 x 而(形式)归纳”; A(x) 叫做“归纳公式”.]

当形式的发展和直觉的推理密切平行时，这种非形式的表示法是很方便的. 它简省字句而且使我们对于形式可证性、形式可推演性的证明过程在外貌上更靠近于非形式数学的方法 (参见 §20).

因此，在任何时候读者必须懂得把这些过程严格化，改依我们的导出规则而用“$\vdash$”符号叙述之. $\vdash$记号可以对我们的导出规则给出简单而精确的叙述，清楚地指出它们的结构. 当我们要叙述新规则时，或用它而能够强调推演性关系的形式时，或用它而能够强调我们是讨论系统内的公式(而非在系统内讨论)时，我们仍将继续应用它.

今后我们一般地把 $a\cdot b$ 缩写为“ab”[1)]

定理 23 (相等性的性质)

*100. $\vdash a=a$.　　　　*101. $\vdash a=b\supset b=a$.

*102. $\vdash a=b \& b=c\supset a=c$.

(自反性，对称性及可传性.)

*103(公理 17). $\vdash a=b\supset a'=b'$.

---

1) 一般地，命 r, s 为任意的项，我们把 $r\cdot s$ 缩写为 “rs”——俄译注.

$$*104.\ \vdash a = b \supset a + c = b + c.$$

$$*105.\ \vdash a = b \supset c + a = c + b.$$

$$*106.\ \vdash a = b \supset ac = bc \qquad *107.\ \vdash a = b \supset ca = cb.$$

（关于函数符号′，+，·的特殊替换性.）

$$*108\ (\text{公理 } 16).\quad \vdash a = b \supset (a = c \supset b = c).$$

$$*109.\ \vdash a = b \supset (c = a \supset c = b).$$

（关于谓词符号=的特殊替换性.）

证明 *100. 在 §19 例 1 中我们已经由公设而直接证明这个公式了. 若应用后来建立了的导出规则，可把这证明综述如下：由公理 16 作代入（§32，*66）得 $a + 0 = a \supset (a + 0 = a \supset a = a)$，故由公理 18（用⊃消两次）得 $a = a$.

*101. 试用非形式的表示法，设 $a = b$. 由公理 16 得 $a=c \supset b = c$. 以 a 代 c 得 $a = a \supset b = a$. 故由 *100 得 $b = a$.

*104. 试用形式归纳规则而证明. 在奠基中以及在归纳推步中都将用相等链的方法（参看 §26 末）. 我们使用这个方法是建基于已证明了 *100—*102 这事实之上的. 因为我们还没有证明一般的替换性质（定理 24(a)），凡是要把一项换为另外与它相等的一项时，每一步都必须就该情形的特殊替换结果而求得根据. 为此，在这里我们使用公理 17（*103）. 对一公理或已经证明的公式而作代入将不明显地指出. 设 $a = b$，今对 c 作归纳以证明 $a + c = b + c$ 如下. **奠基**：$a + 0 = a$[公理 18]$= b$[假设]$=b + 0$[公理18]. **归纳推步**：作为归纳假设，设 $a + c = b + c$，则$a+c' = (a + c)'$[公理 19]$=(b + c)'$[归纳假设，公理 17]$=b + c'$[公理 19].

*105. 设把 $a = b \supset c + a = c + b$ 简记为"A(a,b)"，今就 a 作归纳而证明 $\forall b$A(a,b). 今只述归纳推步，奠基一步骤由读者自为之. **归纳推步**：设 $\forall b$A(a,b). 由∀消得 A(a,b). 今就 b 作归纳而推出 A(a',b). **奠基**：设 $a' = 0$. 但由公理 15，$\neg a' = 0$. 故由弱¬消（§23）得 $c + a' = c + 0$. **归纳推步**：（我们并不需要对 b 的归纳假设.）设 $a' = b'$. 则由公理 14 得 $a=b$；

再用 $A(a,b)$ 得 $c+a=c+b$. 但 $c+a'=(c+a)'$ [公理 19] $=(c+b)'$ [用 $c+a=c+b$ 及公理 17] $=c+b'$ [公理 19]. (就 a 作归纳时我们为什么取 $\forall bA(a,b)$ 而不取 $A(a,b)$ 作为归纳公式呢? 参考归纳规则的叙述. 在对 a 作的归纳推步中再对 b 作归纳时, $\forall bA(a,b)$ 便是 Γ.)

处理 *105 的另一法是先证 *118 及 *119, 然后 *105 便可由 *104 推得.

*106 与*107. 和 *104 与 *105 相似. 要证明已假设 $ac=bc$ 后,在 $ac+a$ 中可以把 ac 代以 bc,我们必须使用 *104;等等.

替换　定理 24　(a). 设 u_r 为一项,含有项 r 的某一个明指出现,把这个出现换为一项 s 后结果为 u_s,则

$$r=s\vdash u_r=u_s.$$

(b) 设 C_r 为一公式含有项 r 的一个明指出现(不作为一量词中的变元出现),把这个出现换为一项 s 后结果为 C_s,则

$$r=s\vdash^{x_1\cdots x_n}C_r\sim C_s.$$

这里 $x_1,\cdots,x_n$ 为 r 或 s 中的变元而属于 C_r 中的某些量词的,这些量词的辖域又包含有该 r 的明指出现的. (替换定理.)

例子见后. 证明与前相同(§§26,33),但用七条补充引理.

替换的补充引理　如果 r 与 s 为项,则:

$$^*110.\ r=s\vdash r'=s'.$$

*111. $r=s\vdash r+t=s+t$.　　*112. $r=s\vdash t+r=t+s$.

*113 $r=s\vdash rt=st$.　　*114. $r=s\vdash tr=ts$.

*115 $r=s\vdash r=t\sim s=t$.　　*116. $r=s\vdash t=r\sim t=s$.

证明　前面引理由 *103—*107 用代入(*66)及⊃消而得. 最后两引理由 *108 及 *109 再用 *66, *101,⊃消及*16而得.

例 2　设 r 为 b,s 为 a,C_r 为 $\exists d(d'+b=c)$. 由 r 到 C_r 及由 s 到 C_s 的平行构成过程如下, r 在 C_r 中的深度为 3.

b	a
$d'+b$	$d'+a$

$$d' + b = c \qquad\qquad d' + a = c$$
$$\exists d(d' + b = c) \qquad \exists d(d' + a = c)$$

设在前面两行的两表达式间加入=号，在后面两行的之间加入~号．结果所得的公式都可以由前推后，只要继续应用 *112，*115，*72(变化 d)便成．若用缩写符号"<"(§17)，结果可写为 $b=a \vdash b < c \sim a < c$．（为什么在结果中 d 不变化？）

系 1 在定理所述的条件下：如果 $\vdash r = s$ 则 $\vdash u_r = u_s$ 及 $\vdash C_r \sim C_s$．

系 2 在定理所述的条件下：$r = s, C_r \vdash^{x_1 \cdots x_n} C_s$，这里 $x_1, \cdots, x_n$ 只对第一个假定公式是变化的．如果 $\vdash r = s$ 则 $C_r \vdash C_s$．（相等关系的替换性．）

例 2(续完) 再用 *101 得：$a = b, b < c \vdash a < c$．

如前，在替换之前可先对个体变元作代入（参看 § 33 例 4 及 §34 附注 2 前面的话)．

§ 39. 加法，乘法，次序

群 B 的公设(§19)可如下描述．公设 14，15 及 13 乃形式地表述皮亚诺公理的最后三条(§6)．（本系统中只用自然数变元，故皮亚诺的前两条公理由 §17 项的定义中句 1 及句 5 而引入．）公理16 及 17 给出相等关系的性质(其中公理17又表示后继函数 ′ 的单值性，这在皮亚诺的表述中没有明白说出)．公理 18 及 19 可叫做用以定义函数+的'递归方程'，公理 20 及21则是用以定义函数 · 的'递归方程'．

关于缩写"$a \neq b$"及"1"，"2"，"3"，…，见 §17．

定理 25(算术定律)

*117. $\vdash (a + b) + c = a + (b + c)$.

*118. $\vdash a' + b = (a + b)'$.

*119. $\vdash a + b = b + a$.

*120. $\vdash a(b + c) = ab + ac$.

*121. $\vdash (ab)c = a(bc)$.

*122. $\vdash a'b = ab + b$.

*123. $\vdash ab = ba$.

(关于＋及·的结合律，可换律及分配律，以及用以证明可换律的引理.)

*124(公理 18). $\vdash a + 0 = a$. *125(公理20). $\vdash a \cdot 0 = 0$.

*126. $\vdash a + 1 = a'$. *127. $\vdash a \cdot 1 = a$.

(关于 0 及 1 的直接定律.)

*128. $\vdash a + b = 0 \supset a = 0 \& b = 0$.

*129. $\vdash ab = 0 \supset a = 0 \vee b = 0$.

*130. $\vdash a + b = 1 \supset a = 1 \vee b = 1$.

*131. $\vdash ab = 1 \supset a = 1 \& b = 1$.

(关于 0 及 1 的逆定律.)

*132. $\vdash a + c = b + c \supset a = b$.

*133. $\vdash c \neq 0 \supset (ac = bc \supset a = b)$.

(关于＋及·的逆定律.)

证明 在这些证明中，因为我们已经有定理 24(a)，所以不必如定理 23 的证明那样再用它的特例 *103—*107 了.

*117 与 *118. 分别就 c 与 b 作归纳.

*119. 就 a 作归纳，在奠基中再就 b 作归纳.

*122. 就 b 作归纳. **归纳推步**: 假设 $a'b = ab + b$. 则 $a'b' = a'b + a'$[公理21]$=(ab + b) + a'$[归纳假设]$= ((ab + b) + a)'$[公理19]$= (ab + (b + a))'$[*117]$= (ab + (a + b))'$[*119]$= ((ab + a) + b)'$[*117]$= (ab' + b)'$[公理 21]$= ab' + b'$[公理19].

*128. 如果$\vdash$A(0)及$\vdash$A(x')，则$\vdash$A(x). 因由$\vdash$A(x')根据$\vdash$的一般性质可得 A(x)$\vdash$A(x')，故可就 x 而作归纳. 这规则可叫做(对 x 的)归纳穷举. 对 *128 而言，试把需证明的公式叫做“A(a, b)”. 要对 a 而作归纳穷举以证明 A(a, b)，只须证明 A(0,b)及 A(a',b) 便够了. 要对 b 的作归纳穷举以证明这两者，

只须证明四个公式 $A(0,0)$, $A(0,b')$, $A(a',0)$ 及 $A(a',b')$ 便够了,即证明下四个公式便够了:

$$0+0=0\supset 0=0\&0=0,\quad 0+b'=0\supset 0=0\&b'=0,$$

$$a'+0=0\supset a'=0\&0=0,\quad a'+b'=0\supset a'=0\&b'=0.$$

这四个公式的证明都极容易,因为在每个情形下我们只须把蕴涵式的前件驳斥(用公理 15)或把其后件证出便成(参看 §26*10a 及 *11.)

*130. 同法证明,但重复使用穷举证法,即证明 $A(x')$ 时我们还证 $A(0')$ 及 $A(x'')$. 总共说来,要证 $A(a,b)$, 只须证九个公式便够

$$A(0,0), A(0,1), A(0,b''), A(1,0), A(1,1), A(1,b'')$$
$$A(a'',0), A(a'',1), A(a'',b'').$$

每个公式的处理都是按上述常规来作的(用公理 14 及 15).

*132. 就 c 作归纳,用公理 14.

*133. 设把 $ac=bc\supset a=b$ 缩写为"$A(a,b)$". 假设 $c\neq 0$. 我们就 b 作归纳而推出 $\forall aA(a,b)$ 如下. (参看 *95.) **奠基**: 设 $ac=0c$. 由 *125(及 *123) $ac=0$. 但 $c\neq 0$ 故由 *129 及命题演算得 $a=0$. **归纳推步**: 设 $\forall aA(a,b)$. 由 $\forall$ 消得 $A(a,b)$. 我们将就 a 作归纳而推演 $A(a,b')$. **奠基**: 设 $0c=b'c$. 由 *125(及 *123, *101)得 $b'c=0$; 由 *129 得 $b'=0\vee c=0$. 但由公理 15, $b'\neq 0$, 又由假设 $c\neq 0$; 故 $\neg(b'=0\vee c=0)$. 由这个矛盾及弱$\neg$消(§23)可得 $0=b'$. **归纳推步**: 设 $a'c=b'c$. 由 *122, $ac+c=bc+c$. 由 *132 得 $ac=bc$. 故由 $A(a,b)$ 得 $a=b$; 再由 *103 得 $a'=b'$.

处理 *133 的另一法是等到建立 *139 以后,这时它便可和 *146b 同法证明了.

现在我们在使用 §17, §33 中的约定的情况下以缩写号 "$a<b$" 表示 $\exists c(c'+a=b)$[1]; 又把 "$b>a$" 作为 $b<a$ 的缩写; "$a\leqslant b$" 作为 $a<b\vee a=b$ 的缩写; "$a\geqslant b$" 作为 $b\leqslant a$ 的缩写;

1) 不但对特殊变元 a,b 如此缩写,对任何两项 r,s 亦如此缩写——依俄译注.

"$a<b<c$"作为 $a<b\&b<c$ 的缩写(参看 §26 末);等等[1].

定理 26 (次序性质)

*134a. $\vdash a<b<c \supset a<c$. *134b. $\vdash a\leqslant b<c\supset a<c$.

*134c. $\vdash a<b\leqslant c\supset a<c$. *134d. $\vdash a\leqslant b\leqslant c\supset a\leqslant c$.

(可传律.)

*135a. $\vdash a<a'$. *135b. $\vdash 0<a'$. *136. $\vdash 0\leqslant a$.

137(=137_0). $\vdash a=0\vee\exists b(a=b')$.

*137_1. $\vdash a=0\vee a=1\vee\exists b(a=b'')$.

*137_2. $\vdash a=0\vee a=1\vee a=2\vee\exists b(a=b''')$. ···

*138a. $\vdash a\leqslant b\sim a<b'$. *138b. $\vdash a>b\sim a\geqslant b'$.

(关于 0 及 ′ 的次序性质.)

*139. $\vdash a<b\vee a=b\vee a>b$.

*140. $\vdash\neg a<a$. *141. $\vdash a<b\supset\neg a>b$.

(连通性,反自反性,反对称性.)

*142a. $\vdash a+b\geqslant a$. *143a. $\vdash b\neq 0\supset ab\geqslant a$.

*142b. $\vdash b\neq 0\supset a+b>a$.

*143b. $\vdash a\neq 0\& b>1\supset ab>a$.

*143c. $\vdash b\neq 0\supset a'b>a$; 故 $\vdash b\neq 0\supset\exists c(cb>a)$.

*144a. $\vdash a<b\sim a+c<b+c$.

*144b. $\vdash a\leqslant b\sim a+c\leqslant b+c$.

*145a. $\vdash c\neq 0\supset(a<b\sim ac<bc)$.

*145b. $\vdash c\neq 0\supset(a\leqslant b\sim ac\leqslant bc)$.

(加法与乘法下的不等式.)

*146a. $\vdash b\neq 0\supset\exists q\exists r(a=bq+r\& r<b)$.

*146b. $\vdash a=bq_1+r_1\& r_1<b\& a=bq_2+r_2\& r_2<b$

$\supset q_1=q_2\& r_1=r_2$.

(商与剩余的存在性及唯一性.)

证明 *134a. 假设 $a<b<c$ 即 $a<b\&b<c$ 即 $\exists d(d'+a=b)\&\exists e(e'+b=c)$. 为应用∃消及&消起见,假设 $d'+a=$

1) 不但对特殊变元 a,b 如此缩写,对任何两项 r,s 亦如此缩写——依俄译注.

b 及 $e'+b=c$，于是 $e'+(d'+a)=c$，它可重新结合为 $(e'+d)'+a=c$. 由 ∃ 引得 $\exists b(b'+a=c)$ 即 $a<c$.

*134b. 由 *134a 应用穷举证明(§23).（参看 §38 例 2.）

*136. 就 a 作归纳穷举，应用 *135b.

*137, $*137_k$. 继续使用归纳穷举；或如下证明：若用公理 18 及=的性质(参看 §33 例 4)可见 *136 的公式等价于*137 的公式；而 $*137_1$,，$*137_2$，…等等便依次得到.

*138a. 由 ∃ 消 ∨ 消及 ∨ 引，再用 *137 得 $\vdash a<b' \sim 0'+a=b' \vee \exists c(c''+a=b')$. 若用 *119 及公理 19,17,14 及 18 可得 $\vdash 0'+a=b' \sim a=b$. 若用 *119 及公理 19, 17, 14 及*72 (或 ∃ 消及 ∃ 引)可得 $\vdash \exists c(c''+a=b') \sim a<b$.

*139. 就 b 作归纳，奠基中用*136，归纳推步中用 *138a, b.

*140. 设 $a<a$ 即 $\exists b(b'+a=a)$. 为了 ∃ 消设 $b'+a=a$. 则由 *132, *124 及 *119 得 $b'=0$ 与公理 15 冲突. **附注**：因为 $b'=0$ 及 $b'\neq 0$ 这两个互相矛盾公式含有自由 b，故不能够立即使用 ∃ 消. 但由弱¬消(§23)，我们可先推出一对不含自由 b 的矛盾公式例如 $0=0$ 及 $0\neq 0$（然后再用 ∃ 消——译者).

由 *140 得，$\vdash a=b \supset \neg a<b$.

*143b. 假设 $a\neq 0 \& b>1$. 由 $a\neq 0$ 及 *137 得 $\exists c(a=c')$；由 $b>1$ 及 *140, *141 及 *135a 得 $b\neq 0 \& b\neq 1$，故再由 $*137_1$ 得，$\exists d(b=d'')$. 假设(为了使用 ∃ 消)$a=c'$ 及 $b=d''$.

*144a. 由 *104, *132, *117 及 *72.

*145a. 假设 $c\neq 0$. **第一部分**：须推演出 $a<b \supset ac<bc$. (让诸读者去作)**第二部分**：须推演出 $ac<bc \supset a<b$. 假设 $ac<bc$. 要推出 $a<b$ 只须根据 *139 用穷举法(∨消)从三个穷举假设而推出 $a<b$ 便够了. **情况 1**：$a<b$. **情况 2**：$a=b$. 则 $ac=bc$，它与 *140 合并得 $\neg ac<bc$，这与我们的假设 $ac<bc$ 相矛盾. 由弱¬消得 $a<b$. **情况 3**：$a>b$ 即 $b<a$. 则由第一部分结果得 $bc<ac$ 即 $ac>bc$，故由 *141 得 $\neg ac<bc$.

*146a. 就 $\boldsymbol{a}$ 作归纳（在作了假设 $\boldsymbol{b} \neq 0$ 后）.（亦可根据 *143c 及 *149 而作证明.）

*146b. 假设 $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}\boldsymbol{q}_1 + \boldsymbol{r}_1 \& \boldsymbol{r}_1 < \boldsymbol{b} \& \boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}\boldsymbol{q}_2 + \boldsymbol{r}_2 \& \boldsymbol{r}_2 < \boldsymbol{b}$. 要推演出 $\boldsymbol{q}_1 = \boldsymbol{q}_2$，只须用 *139 根据穷举及弱¬消，从 $\boldsymbol{q}_1 < \boldsymbol{q}_2$ 推演出矛盾以及从 $\boldsymbol{q}_1 > \boldsymbol{q}_2$ 推演出矛盾便够了. 假设 $\boldsymbol{q}_1 < \boldsymbol{q}_2$. 为了使用∃消，可假设 $\boldsymbol{e}' + \boldsymbol{q}_1 = \boldsymbol{q}_2$. 今 $\boldsymbol{b}\boldsymbol{q}_1 + \boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}\boldsymbol{q}_2 + \boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{b}(\boldsymbol{e}' + \boldsymbol{q}_1) + \boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{b}\boldsymbol{q}_1 + (\boldsymbol{b}\boldsymbol{e}' + \boldsymbol{r}_2)$. 故 $\boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{b}\boldsymbol{e}' + \boldsymbol{r}_2$[*132]$\geqslant \boldsymbol{b}\boldsymbol{e}'$[*142a]$\geqslant \boldsymbol{b}$[*143a]. 由 *140 与 *141，这与 $\boldsymbol{r}_1 < \boldsymbol{b}$ 相矛盾. 另一情况仿此. 既推出 $\boldsymbol{q}_1 = \boldsymbol{q}_2$ 后，我们有 $\boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{b}\boldsymbol{q}_1 + \boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{b}\boldsymbol{q}_1 + \boldsymbol{r}_2$，故由 *132 得 $\boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{r}_2$.

*§ 40. 数论的进一步发展

我们的数论形式体系与非形式理论的不同之处在于它把逻辑明白写出. 我们对逻辑已经熟识到了这样的地步，使得数论在形式体系内的进一步发展将可沿非形式理论中所熟悉的通路而进行. 对这发展我们将不再有系统地继续下去了，但在转到有关这体系的一般元数学问题以前，还需指出它的若干方面.

在本节中，x 为变元，A(x) 为公式，y 与 z 为彼此不同的又异于 x 的变元，它们对于 A(x) 中的 x 是自由的，且不自由出现于 A(x) 中.

最小数原则（或自然数集的良序性）说，如果有一自然数 x 使得 $A(x)$，则有一个最小的这样的 x，叫它为 y. y 的性质可在形式符号体系中用公式 $A(y) \& \forall z(z < y \supset \neg A(z))$ 表示，或者可用下式即*147（由 *13，*139 得证）而写成另一个等价形式.

*147. $\vdash z < y \supset \neg A(z) \sim A(z) \supset y \leqslant z$.

我们首先证明：

*148°. $\vdash \exists y[y < x \& A(y) \& \forall z(z < y \supset \neg A(z))]$
$\vee \forall y[y < x \supset \neg A(y)]$.

（关于自然数列的初始（截）段的排中律及最小数原则.）

*148a. $A(x)\vee\neg A(x)\vdash^{x}\exists y[y<x\&A(y)\&\forall z(z<y\supset\neg A(z))]\vee\forall y[y<x\supset\neg A(y)]$.

*148b. $\vdash\neg\neg\{\exists y[y<x\&A(y)\&\forall z(z<y\supset\neg A(z))]\vee\forall y[y<x\supset\neg A(y)]\}$.

(这些定律的直觉主义说法.)

证明 *148. 就 x 作归纳如下. 设把 *148 中的公式缩写为“$P(x)\vee Q(x)$”. **奠基**: 由 *136, *140, *141 及 *10a. 可得$\vdash Q(0)$, 故$\vdash P(0)\vee Q(0)$. **归纳推步**: 设 $P(x)\vee Q(x)$. 然后由穷举法($\vee$消)推出 $P(x')\vee Q(x')$. 就情形 1 言, $P(x)\vdash P(x')\vdash P(x')\vee Q(x')$, 这可由 *135a, *134a 而得. 对情形 2 言, 我们再依 $A(x)\vee\neg A(x)$(*51)而分出子情形. 对子情形 2a 言, $Q(x), A(x)\vdash P(x')\vdash P(x')\vee Q(x')$, 这由 *135a 可得. 对子情形 2b 言, $Q(x), \neg A(x)\vdash Q(x')\vdash P(x')\vee Q(x')$, 这由 *138a 可得

*148a. 因在直觉主义系统中 *51 不能成立, 故把 $\forall x(A(x)\vee\neg A(x))$ 作为归纳时的假定公式Γ[1].

*148b. 由公理模式 6 用$\supset$消及两次换质位 (*13, *12) 得 $A\supset\neg\neg C, B\supset\neg\neg C\vdash A\vee B\supset\neg\neg C\vdash\neg\neg(A\vee B)\supset\neg\neg C$. 故由$\supset$规则得: 如果 $\Gamma, A\vdash\neg\neg C$ 及 $\Gamma, B\vdash\neg\neg C$ (其自由变元分别对 A 及 B 保持固定)则 $\Gamma, \neg\neg(A\vee B)\vdash\neg\neg C$. 因此我们得到了穷举证法对把穷举公式 $A\vee B$ 及结论 C 均双重否定时的情形的修正, 因此如果我们把 *148 证明中的归纳公式换为$\neg\neg(P(x)\vee Q(x))$, 而穷举公式换为$\neg\neg(A(x)\vee\neg A(x))$ (由 *51a, 这是可以直觉主义地证明的), 则归纳证明仍可实行(用*49a), 而给出*148b.

现在我们可以推出最小数原则了.

*149°. $\vdash\exists xA(x)\supset\exists y[A(y)\&\forall z(z<y\supset\neg A(z))]$.

(最小数原则.)

*149a. $A(x)\vee\neg A(x)\vdash^{x}\exists xA(x)\supset\exists y[A(y)\&\forall z(z<y\supset\neg A(z))]$.

1) 这里如删去 A^x, 则 Γ 含有自由 x, 故本章开头 §38 处的归纳规则应加以推广(见第 195 页上该规则的俄译注)——译者注.

*149b. $\vdash \neg\neg\{\exists xA(x) \supset \exists y[A(y) \& \forall z(z < y \supset \neg A(z))]\}$.

（最小数原则的直觉主义说法.）

证明 *149(或*149 a). 假设 $\exists xA(x)$；为 $\exists$ 消起见再假设 $A(x)$. 在*148 中(或在*148a 的结论中)以 x' 代 x,因而得 $P(x') \vee Q(x')$. **情形 1**: $P(x')$. 则 $\exists y[A(y) \& \forall z(z<y \supset \neg A(z))]$. **情形 2**: $Q(x')$. 则由 *135a 得$\neg A(x)$,这与 $A(x)$ 相矛盾. 由弱$\neg$消得 $\exists y[A(y) \& \forall z(z < y \supset \neg A(z))]$.

*149b. 改用 *148b 及修正过的穷举证法得 $\exists xA(x) \supset \neg\neg \exists y[A(y) \& \forall z(z < y \supset \neg A(z))]$. 再用 *60h, g.

*148a 的别的后承是:

*150. $A(x) \vee \neg A(x) \vdash^{x} \exists y[y < x \& A(y)] \vee \neg \exists y[y < x \& A(y)]$.

*151. $A(x) \vee \neg A(x) \vdash^{x} \forall y[y < x \supset A(y)] \vee \neg \forall y[y<x \supset A(y)]$.

（对直觉主义系统有趣的结果.）

证明 *150. 由 *148a 得 $A(x) \vee \neg A(x) \vdash^{x} \exists y[y < x \& A(y)] \vee \forall y[y < x \supset \neg A(y)]$. 但 $\vdash \forall y[y < x \supset \neg A(y)] \sim \forall y \neg [y < x \& A(y)]$ [*58b] $\sim \neg \exists y[y < x \& A(y)]$[*86].

*151. 仿上，应用 *148a 于$\neg A(x)$，并换$\neg\neg A(x)$为 $A(x)$ (因由*49c,有 $A(x) \vee \neg A(x) \vdash \neg\neg A(x) \sim A(x)$).

有些数论的定理需要更进一步的概念，可举欧几里得定理为例，它说，有无穷多个质数. 这可表示为：任给一数 a，都有一质数大于 a. 事实上必须有质数介于 $a+1$ 与 $a!+1$ 之间(首尾在内),这可如下推出. 每个正整数 $n \leqslant a$ 都除尽 $a!$. 故除 1 以外它们都除不尽 $a!+1$. 又 $a!+1>1$;故或者它是质数,或以一质数为因子. 这质数介于 $a+1$ 与 $a!+1$ 之间(首尾在内).

这两情形可合并为: $a!+1$ 的大于 1 的最小的因子必是大于 a 的质数. 若把 $a!$ 换为 $1, \cdots a$ 的任何公倍数这推论仍然有效.

为了准备对欧氏定理作形式处理,现在我们引入"$a|b$"(读作"a 除尽 b"或"a 为 b 的因子")作为 $\exists c(ac=b)$ 的缩写[1]. 我们

1) 对任何两项 r,s 言,$r|s$ 亦仿此定义——译者注.

可以证明:

*152. $\vdash a|ab$.　　*153. $\vdash a|a$.　　*154. $\vdash a|b \& b|c \supset a|c$.

*155. $\vdash a>1 \supset \neg(a|b \& a|b')$.

*156. $\vdash b \neq 0 \supset (a|b \supset 0<a \leqslant b)$.

(|的性质.)

(提示: 对 *155 的证明可用 *137_1, *145a (及 *135a), *132, 公理15. 对 *156 的证明可用 *143a.) 其次我们引入“Pr(a)” (“a 是质数”)作为 $a>1 \& \neg\exists c\ (1<c<a \& c|a)$ 的缩写. 那末在形式体系内欧几里得定理便由公式 $\exists b(\Pr(b) \& b>a)$ 而表示.

要把上述的证明形式化, 有一个困难是: 在这系统内我们找不出一项可以表示函数 $a!$. 为了避免这个困难, 我们先证:

*157. $\vdash \exists d[d>0 \& \forall b(0<b \leqslant a \supset b|d)]$.

($1,\cdots,a$ 的公倍数的存在性.)

(**证明**　就 a 作归纳. 把这公式叫做“$\exists d A(a, d)$”. 就奠基言可证$\vdash A(0,1)$. 就归纳推步言, 可证(为 ∃ 消起见) $A(a, d) \vdash A(a', da')$.) 今为 ∃ 消起见(从此处起, 为欧氏定理的证明——译者.)假设

(1)　　$d>0 \& \forall b(0<b \leqslant a \supset b|d)$.

满足这公式的变元 d 便起了 $a!$的作用; 更明确些说, 在解释之下, 它表示$1,\cdots a$ 的任何公倍数.

由(1), *144a 及 *153 可得 $d'>1 \& d'|d'$. 故 $\exists e(e>1 \& e|d')$. 根据最小数原则(*149)有 $\exists b[b>1 \& b|d' \& \forall c(c<b \supset \neg(c>1 \& c|d'))]$. 为 ∃ 消之故, 假设

(2)　　$b>1 \& b|d' \& \forall c(c<b \supset \neg(c>1 \& c|d'))$.

设 $1<c<b \& c|b$. 由 $c<b$ 及(2)得$\neg(c>1 \& c|d')$; 但由 $1<c$, $c|b$, $b|d'$ (由(2))及 *154 有 $c>1 \& c|d'$. 由¬引及 ∀ 引得 $\forall c \neg(1<c<b \& c|b)$; 因此由 *86, $\neg\exists c(1<c<b \& c|b)$. 由(2)再用 $b>1$, 故得 $\Pr(b)$.

由(2), $b>1 \& b|d'$. 故由*155, $\neg b|d$. 故由(1), $b>a$.

由 & 引及 ∃ 引得 $\exists b(\Pr(b) \& b>a)$. 因为这公式不含自由 b

或自由 d,所以可根据∃消而把假定公式(2)及(1)解除．这样,在古典系统内欧几里得定理的证明便完成了．

要在直觉主义系统内而证明它，可应用 *149a 以代 *149，但还须证明 $(e>1\&e|d')\vee\neg(e>1\&e|d')$．为此我们先证

*158. $\vdash a=b\vee\neg a=b$.　　　*159. $\vdash a<b\vee\neg a<b$.

*160. $\vdash a|b\sim\exists c(c\leqslant b\&ac=b)$.

(当直觉主义地处理欧几里得定理时用到的.)

(*158 及 *159 可用 *139—*141 证明；*160 的证明与 *156 的相似.)然后我们便依次地证明 $e>1\vee\neg e>1$ (由*159),$e|d'\vee\neg e|d'$ (由*160, *138a, *150, *158)及 $(e>1\&e|d')\vee\neg(e>1\&e|d')$ (再由 §29 附注 1(b) 及 §25 定理 3)．这样不论直觉主义地或古典地均有

*161.　$\vdash\exists b(\mathrm{Pr}(b)\&b>a)$.　(欧几里得定理.)

要认出一个非形式理论内的各证明可以在一个给定的形式系统内加以形式化，必须继续把非形式理论内时时出现的各种论证加以分析与使之定形，使得尽管当理论进一步讨论时非形式推理日益简约，而形式推理仍然能够与之相协调．我们企图继续地认出这种类型的非形式论证是可以形式化的，并把所得的结果写成该形式体系的导出规则．这非常类似于把非形式理论本身由明显叙述的公设来发展这种半形式化过程；不过这里我们却前进得更远一些，不但把（通常意义的）数学原则而且把逻辑也列为公设了．

在非形式推理中，我们所使用的数学归纳不但是简单（或通常)的形式,而且还有修整过的形式即‘串值归纳’(参看 §7 包括例 2, §21 定理 1 的证明, 等等)．但有趣的是,我们可以认出在本形式系统内,这个修整过的归纳形式亦可以由简单的形式推出,后者则是列为本系统的公设．我们把它列为一个定理模式；至于根据该模式而再表述为一个规则这种方法已可以由简单归纳这个例子而充分阐明了(参看 §19 公理模式 13 及 §38 的归纳规则)．

在第一个模式 *162a 中，表达式 A(0) 及 $\forall x[\forall y(y\leqslant x\supset$

$A(y))\supset A(x')]$ 便分别把奠基及归纳推步形式化了；在具更简易形式的 *162b 中，这两步却合并成一个表达式 $\forall x[\forall y(y<x\supset A(y))\supset A(x)]$ 了.

*162a. $\vdash A(0)\&\forall x[\forall y(y\leqslant x\supset A(y))\supset A(x')]\supset A(x)$.

*162b. $\vdash \forall x[\forall y(y<x\supset A(y))\supset A(x)]\supset A(x)$.

(串值归纳法.)

证明 *162a. 假设 $A(0)\&\forall x[\forall y(y\leqslant x\supset A(y))\supset A(x')]$，可对 x 作简单归纳而推演出 $\forall y(y\leqslant x\supset A(y))$，再由 $\forall$ 消得 $A(x)$.

有时归纳中有两个奠基，即作为奠基须证 $A(0)$ 及 $A(1)$，而作为归纳推步须由两个前面的情况 $A(x)$ 及 $A(x')$ 而推出 $A(x'')$. 这可以形式地当作一个串值归纳，在归纳推步中须分情况 $x'=1$ 或 $x'>1$ 而讨论；或者把 $A(x)\&A(x')$ 作为归纳公式因而变成简单归纳. 这种把合取式作为归纳命题的技巧可同样适用于 k 重奠基的归纳，k 固定 $\geqslant 2$，又可适用于多个命题的同时归纳证明.

归纳论证有时可写成递降归纳或无穷递降法证明. 如要证明对每个 x 言 $A(x)$ 都假，可证明如果 $A(x)$ 对某一个 x 为真，则有一更小的数使它亦真.

*163. $\vdash \forall x[A(x)\supset \exists y(y<x\&A(y))]\supset \neg A(x)$.

(无穷递降法.)

*163a. $\vdash \forall x[A(x)\supset \neg\neg\exists y(y<x\&A(y))]\supset \neg A(x)$.

(对直觉主义系统有趣的补充说法.)

证明 假设了 *163 或 *163a 的任一前提后，可由串值归纳而得 $\neg A(x)$.

另一方法 如果取 $\neg A(x)$ 作为 *162b 中的 $A(x)$，则可用下法证明它与 *163a 相等价.

$\vdash \forall y(y<x\supset \neg A(y))\supset \neg A(x)\sim \neg[\forall y\neg(y<x\&A(y))\&A(x)]$ [*58b 两次] $\sim A(x)\supset\neg\forall y\neg(y<x\&A(y))$ [*33, *58b] $\sim A(x)\supset\neg\neg\exists y(y<x\&A(y))$[*86]. 然后由 *163a 而得*163.

*163a 及 *163 的证明亦可由 *149 或由 *149b 使用反证法而

得；反之由 *163a（及 *60h，g）用反证法可证得 *149b.（在每个情况下，相应公式都可在直觉主义谓词演算内互相推演出.）

这些例子提示了，在非形式初等数论内通常所遇到的论证是可以在我们的形式体系内加以形式化的. 像缺乏 $a!$ 这类函数仍然作为一个疑问未能解决（虽则在证明欧几里得定理时我们避免了它）. 这个问题，有关于函数的问题，在§41，§49，§59，§74，§82中将继续受到注意.

在 §42 中我们将讨论形式系统的完备性问题. 从解释的观点来说，这问题包含有：初等数论中一切可能的推理（不仅仅是通常碰到的推理）是否都可在系统内形式化？至少，用以证明能够在系统中表达的命题的那些推理是否如此？我们还讨论一个更特殊的、严格元数学的完备性概念.

§ 41. 形 式 计 算

如果公式 ¬A 是可证的则说公式 A 是（形式地）可驳的.

如果闭公式 A（§ 32 末）或可证或可驳，即或 ⊢ A 或 ⊢ ¬A，则说 A 是（形式地）可判定的.

在一形式数论系统（或一个具有同样形式规则的系统）内，如果每个闭公式 A 是形式地可判定的，则说该系统是（简单）完备的；反之，如果它有一个形式地不可判定的闭公式，则说它是（简单）不完备的[1].

1）形式系统 S_1 叫做形式系统 S 的加强或扩张，如果 S 内每一个可证公式在 S_1 内均可证. 系统 S 叫做不可补足的，如果它不具有完备的且无矛盾的加强，即如果系统 S 的任一个无矛盾的加强都含有一个不可判定的闭公式. 如果对系统 S 的任一个无矛盾的加强都可以能行地（有效地）作出这样的公式，则系统 S 叫做能行不可补足的（乌斯平斯基 В. А. Успенский [1953]）. 能行不可补足的概念可如下加以明确，在形式系统中，可证公式的哥德尔数（参看下文 § 42）作成一个递归可枚集（参看 § 60）. 一系统叫做能行不可补足的，如果存在一个部分递归函数 γ（参看第十二章）具有下列性质：如果 S_1 中可证公式的哥德尔数的某个递归可枚举集的哥德尔数为 n，这里 S_1 是 S 的无矛盾的加强，则 $\gamma(n)$ 有定义，其值为 S_1 中一个不可判定公式的哥德尔数——俄译注.

A必须是闭的这个限制是极为重要的，只有这样，简单完备性这个元数学概念才具有它应有的意义．否则，由于对A及¬A中的自由变元所作的全称性解释，后一公式所表示的便不是前一公式所表示的命题的否定（§ 32）.

例 1 公式 $2|\boldsymbol{a}$（即 $\exists \boldsymbol{c}(0'' \cdot \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a})$）表示命题：每个数 a 是偶的；而 $\neg 2|\boldsymbol{a}$ 表示：每个数 a 不是偶的，即每个数 a 是奇的．两个命题都不是真的；同时我们亦希望该两公式都不可证．但 $\forall \boldsymbol{a} 2|\boldsymbol{a}$ 表示：每个数 a 是偶的；而 $\neg\forall \boldsymbol{a} 2|\boldsymbol{a}$ 表示：并非每个数 a 是偶的．根据古典的排中律，这两命题中必有一是真的．事实上第二命题是真的；而公式 $\neg\forall \boldsymbol{a} 2|\boldsymbol{a}$ 是可证的.

我们不把简单完备性概念应用到命题演算及谓词演算去，因为在解释中，命题字母及谓词字母具有自由变元的作用（§28，§29，§36，§37）．简单完备性便是具有正面准则的完备性概念（§ 29）的又一例.

在本系统的解释下，项 $0, 0', 0'', \cdots$ 表示一些特殊的自然数，这些项叫做数字（numerals），我们把它们分别缩写为符号"0"，"1"，"2"，…，和直觉上的自然数所用的符号同样（如在§ 17，§ 37 中）．更进一步说，凡当我们引入一个斜体字母例如"x"来指定直觉上的自然数时，我们用相应的粗正体字母"$\mathbf{x}$"来指定相应的数字 $0^{(x)}$，即 $0'\cdots'$（共 x 个撇，$x \geqslant 0$）（如在 § 37 中）．因此，我们又用"$\mathbf{x}-1$"指定具有 $x-1$ 个撇（$x>0$）的数字，这不会含混的，因为我们没有形式符号"－"，但是"$\mathbf{x}+1$"却指定 $0^{(x)}+0'$.

设 $P(x_1, \cdots, x_n)$ 为一个直觉的数论谓词．如果有一公式 $\mathrm{P}(\mathrm{x}_1, \cdots, \mathrm{x}_n)$，除却不同的变元 $\mathrm{x}_1, \cdots, \mathrm{x}_n$ 外没有其它自由变元，并且对于每个特殊的自然数 n 元序组 $x_1, \cdots, x_n$，都有：

(i) 如果 $P(x_1, \cdots, x_n)$ 为真，则 $\vdash P(\mathbf{x}_1, \cdots, \mathbf{x}_n)$，

(ii) 如果 $P(x_1, \cdots, x_n)$ 为假，则 $\vdash \neg P(\mathbf{x}_1, \cdots, \mathbf{x}_n)$，

那末我们就说 $P(x_1, \cdots, x_n)$ 可在形式系统数字地表示，而公式 $\mathrm{P}(\mathrm{x}_1, \cdots, \mathrm{x}_n)$ 数字地表示了谓词 $P(x_1, \cdots, x_n)$（而形式变元

$\mathrm{x}_1, \cdots, \mathrm{x}_n$ 分别对应于直觉中变元 $x_1, \cdots, x_n$)[1].

这个概念在元数学上的使用将限于下列情形：当对于谓词 $P(x_1, \cdots, x_n)$ 有一判定过程时（§ 30），亦即当对每个 n 元序组 $x_1, \cdots, x_n$ 都（iii）或 $P(x_1, \cdots, x_n)$ 为真或 $P(x_1, \cdots, x_n)$ 为假时[2].

由（iii）及（i）（ii）可得

(iv) $\vdash \mathrm{P}(\mathbf{x}_1, \cdots, \mathbf{x}_n)$ 或 $\vdash \neg \mathrm{P}(\mathbf{x}_1, \cdots, \mathbf{x}_n)$;

这样，对每组 $x_1, \cdots, x_n$ 而言，$\mathrm{P}(\mathbf{x}_1, \cdots, \mathbf{x}_n)$ 都是可判定的，或说 $\mathrm{P}(\mathrm{x}_1, \cdots, \mathrm{x}_n)$ 是数字地可判定的．因此，公式 $\neg \mathrm{P}(\mathrm{x}_1, \cdots, \mathrm{x}_n)$ 便数字地表示了谓词非 $P(x_1, \cdots, x_n)$.

数字地可表示性这个概念只是一公式 $\mathrm{P}(\mathrm{x}_1, \cdots, \mathrm{x}_n)$ 可表示一谓词 $P(x_1, \cdots, x_n)$ 的若干个意义之一．和另一个意义，即在符号体系的解释（且对 $\mathrm{x}_1, \cdots, \mathrm{x}_n$ 作命名式解释，§ 31）之下 $\mathrm{P}(\mathrm{x}_1, \cdots, \mathrm{x}_n)$ 表示 $P(x_1, \cdots, x_n)$，相比较，它对该系统的推演工具的要求要多一些，因为后者在推演上根本没有要求．但它也不要求表示该谓词各种一般性质的各公式必形式地可证.

例 2 在形式符号的意义之下，公式 $\exists \boldsymbol{c}(\boldsymbol{c}' + \boldsymbol{a} = \boldsymbol{b})$ 与公式 $\exists \boldsymbol{c}(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{c}' = \boldsymbol{b})$ 都表示 $a < b$（而以 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 对应于 a, b），这

1) 可以指出，如果公式 $\mathrm{P}(\mathrm{x}_1, \cdots, \mathrm{x}_n)$ 数字地表示谓词 $P(x_1, \cdots, x_n)$，而 $\mathrm{u}_1, \cdots, \mathrm{u}_n$ 为不同的个体变元，分别对于 $\mathrm{P}(\mathrm{x}_1, \cdots, \mathrm{x}_n)$ 中的 $\mathrm{x}_1, \cdots, \mathrm{x}_n$ 是自由的，则 $\mathrm{P}(\mathrm{u}_1, \cdots, \mathrm{u}_n)$ 亦数字地表示 $P(x_1, \cdots, x_n)$．为今后使用起见，还必须证明：如果 $P(x_1, \cdots, x_n)$ 是可数字地表示的谓词，而 $\mathrm{x}_1^0, \cdots, \mathrm{x}_n^0$ 为随意选取的 n 个不同的个体变元，则 $P(x_1, \cdots, x_n)$ 必被某个公式 $\mathrm{P}^0(\mathrm{x}_1^0, \cdots, \mathrm{x}_n^0)$ 所数字地表示，这里形式变元 $\mathrm{x}_1^0, \cdots, \mathrm{x}_n^0$ 分别相应于 $x_1, \cdots, x_n$．事实上，设 $P(x_1, \cdots, x_n)$ 被公式 $\mathrm{P}(\mathrm{x}_1, \cdots, \mathrm{x}_n)$ 所数字地表示，再设 $\mathrm{y}_1, \cdots, \mathrm{y}_m$ 为这公式的所有的不同约束变元．今选取不同的变元 $\mathrm{z}_1, \cdots, \mathrm{z}_m$，使得它们无一与 $\mathrm{x}_1^0, \cdots, \mathrm{x}_n^0$ 中任一相同，然后把每个变元 y_i 换为 z_i．所得的公式 $\tilde{\mathrm{P}}(\mathrm{x}_1, \cdots, \mathrm{x}_n)$ 将与公式 $\mathrm{P}(\mathrm{x}_1, \cdots, \mathrm{x}_n)$ 相合，再由引理 15 b(§33)，亦与公式 $\mathrm{P}(\mathrm{x}_1, \cdots, \mathrm{x}_n)$ 等价；因此 $\tilde{\mathrm{P}}(\mathrm{x}_1, \cdots, \mathrm{x}_n)$ 亦数字地表示了 $P(x_1, \cdots, x_n)$．因为 $\mathrm{x}_1^0, \cdots, \mathrm{x}_n^0$ 分别对 $\tilde{\mathrm{P}}(\mathrm{x}_1, \cdots, \mathrm{x}_n)$ 中的 $\mathrm{x}_1, \cdots, \mathrm{x}_n$ 是自由的，所以根据所作的附注，可取 $\tilde{\mathrm{P}}(\mathrm{x}_1^0, \cdots, \mathrm{x}_n^0)$ 作为所求的 $\mathrm{P}^0(\mathrm{x}_1^0, \cdots, \mathrm{x}_n^0)$——俄译注.

2) 就古典逻辑的观点来说，论断（iii）对任何谓词 $P(x_1, \cdots, x_n)$ 都是成立的．就构造主义（直觉主义）逻辑的观点来说（著者是以这观点作为元数学的基础的），论断（iii）对 $x_1, \cdots, x_n$ 的每一个选择都成立的必要与充分条件是，谓词 $P(x_1, \cdots, x_n)$ 有一个判定过程——俄译注.

点我们只从 § 17 便可看见，无须知道任何推演推则.

第一个公式 $\exists c(c'+a=b)$（它便是我们取作永久缩写式 "$a<b$" 的那一个，§ 17 § 39)是在形式数论系统内数字地表示 $a<b$ 的，甚至于在除去了归纳模式（或公理 20, 21）的系统内亦然，这点可如下证明.

对于 (i)，我们须证明，如果 a,b 为任何两个自然数使得 $a<b$，则 $\vdash \exists c(c'+\mathbf{a}=\mathbf{b})$. 例如，设 $a=3$，而 $b=5$. 今有 $\vdash 0''+0'''=(0''+0'')'$ [公理 19] $=(0''+0')''$[公理 19，公理 17]$=(0''+0)'''$[公理 19，公理 17 两次]$=0'''''$ [公理 18，公理 17 三次]. 因此（暗中使用 *102)，$\vdash 0''+0'''=0'''''$. 由 $\exists$ 引得 $\vdash \exists c(c'+0'''=0''''')$，即 $\vdash \exists c(c'+3=5)$. 依同样的步骤，对任何的 a, b，只要 $a<b$，便有$\vdash \exists c(c'+\mathbf{a}=\mathbf{b})$. 要一般地证明这点，我们可首先就 k 用非形式归纳并用公理 17—19（及 *102)证明下引理：对任何项 t，$\vdash t+0^{(k)}=t^{(k)}$.

对 (ii) 我们必须证明，如果 a,b 为任何两自然数，而并非 $a<b$，则 $\vdash \neg\exists c(c'+\mathbf{a}=\mathbf{b})$. 如果不是 $a<b$，则 $a\geqslant b$. 例如，设 $a=3$, $b=2$. 完全同上，应用公理 17—19，不过把 c' 换 $0''$（即在引理中 t 代以 c' 而不代以 $0''$)，可得$\vdash c'+0'''=c''''$. 故 $c'+0'''=0''\vdash c''''=0''\vdash c''=0$ [用公理 14 两次]. 但由公理 15 得$\vdash \neg c''=0$，由反证法($\neg$引)得$\vdash \neg c'+0'''=0''$；故由 $\forall$ 引及 § 35*86 得$\vdash \neg\exists c(c'+0'''=0'')$，即 $\vdash \neg\exists c(c'+3=2)$. 同样，对任何的 a, b，只要 $a\geqslant b$ 都有 $\vdash \neg\exists c(c'+\mathbf{a}=\mathbf{b})$.

因此在没有公理模式 13 的形式系统内，$\exists c(c'+a=b)$ 数字地表示了 $a<b$. 但是我们不能希望在这种系统内表示$<$的一般性质的公式如 *134a—*146b (把'$a<b$'作为 $\exists c(c'+a=b)$ 的缩写)是可证的，除却一些个别情况以外(例如*135b).

另一公式 $\exists c(a+c'=b)$（在包括公理模式 13 的整个体系内，根据 *119，它是等价于 $\exists c(c'+a=b)$ 的）看来并不能数字地表示 $a<b$，如果该系统内没有公理模式13的话. 当然，在整个

系统内(甚至于即使没有公理模式 13，但如果把 *118 或 *119 加入作为公理时)它是数字地表示 $a<b$ 的.

本节中加以编号的那些结果(从 *(164) 起)，主要地是对整个数论系统而说的（正如本章各部分一样）. 但实际上要证明它们，并无需重新再使用形式归纳规则(或公理模式 13)，只须使用由该模式 13 所证出的若干特例公式便够了. 更明确些说，除却特别标出并列于本节之末的若干例外情况外，本节的其余结果只用谓词演算，特殊的数论公理 14—21，相等关系的替换性(这本身又可改为 § 38 的 *104—*107) 及 § 39 的 *137 (或 *136) 便够了. (从整个系统中分出这个子系统是由罗宾孙 (Raphael Robinson)，[1950] 摘要*，所作出的，他所以分出的缘故将在 § 76 讨论.)

谓词

*(164) $a=b$　　　　*(165) $a<b$

是分别地被公式 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$ 及 $\boldsymbol{a}<\boldsymbol{b}$ 即 $\exists \mathbf{c}(\mathbf{c}'+\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b})$ 所数字地表示的.

证明　*(165) 见例 2；或 (在整个数论系统内) 用 *135a, *134a, *140, *141.

如果 x 是一变元，A(x) 及 B(x) 为公式，k 为一自然数，y 为一个与 x 不同的变元，对 A(x) 中的 x 是自由的且不自由出现于 A(x) 中，而 t 为一项不含 x 且对 A(x) 中的 x 是自由的:

*166. $A(0), A(1), \cdots, A(\mathbf{k}-1) \vdash \forall x(x<\mathbf{k} \supset A(x))$.

*166a. $A(0), A(1), \cdots A(\mathbf{k}) \vdash \forall x(x \leqslant \mathbf{k} \supset A(x))$.

*167. $\forall x(x<\mathbf{k} \supset A(x)) \vdash A(\mathbf{i}), \mathbf{i}=0, 1, \cdots, k-1$.

*167a $\forall x(x \leqslant \mathbf{k} \supset A(x)) \vdash A(\mathbf{i}), \mathbf{i}=0, 1, \cdots, k$.

*168. $A(t) \vdash \forall x[x \geqslant t \supset \exists y(y \leqslant x \& A(y))]$.

*169. $\forall x[x<t \supset A(x)], \forall x[x \geqslant t \supset B(x)] \vdash \forall x[A(x) \vee B(x)]$.

当 $k=0$ 时则 *166 的假定公式列 $A(0), A(1), \cdots, A(\mathbf{k}-1)$ 将是空的，而 *167 中将没有 $A(\mathbf{i})$.

证明　*166. 如果我们能够证明 $A(0), A(1), \cdots, A(\mathbf{k}-1), x<\mathbf{k} \vdash A(x)$，则由⊃引及 ∀ 引得可得 *166. 由 $*137_k$ (或

通过 $*137_k$ 的证明而由*137 或 *136)得 $\vdash x=0 \vee x=1 \vee \cdots \vee x=\mathbf{k}-1 \vee x=\mathbf{k} \vee \exists y(x=y^{(k+1)})$. 因此根据∨消，弱¬消及∃消我们只须推出下者便够了：或者推演出 A(x)，或者 A(0), A(1), ⋯, A($\mathbf{k}-1$), $x<\mathbf{k}$ 依次与每一个 $x=0, x=1, \cdots, x=\mathbf{k}-1, x=\mathbf{k}, x=y^{(k+1)}$ 发生矛盾. 但(这里我们使用 § 38 起首处所说的非形式表示法)由每一个 $x=0, x=1, \cdots, x=\mathbf{k}-1$ 与相应的 A(0), A(1), ⋯, A($\mathbf{k}-1$) 作替换可得 A(x) (§ 38 定理 24 系 2). 由 $x=\mathbf{k}$ 与 $x<\mathbf{k}$ 作替换得 $\mathbf{k}<\mathbf{k}$, 与 $\neg\mathbf{k}<\mathbf{k}$ 相矛盾，而后者(由*(165))是可证的. 由 $x=y^{(k+1)}$ 与 $x<\mathbf{k}$ 作替换得 $y^{(k+1)}<\mathbf{k}$, 即 $\exists z(z'+y^{(k+1)}=\mathbf{k})$. (为∃消之故)设 $z'+y^{(k+1)}=\mathbf{k}$, 由此应用公理 19 $k+1$ 次(亦应用公理 17 若干次)得 $(z'+y)^{(k+1)}=\mathbf{k}$; 应用公理 14 k 次得 $(z'+y)'=0$, 这与公理 15 相矛盾. (参看 § 39*140 的证明中附注处.)

*167. 因 $i<k$, 由(*165), 所以 $\vdash \mathbf{i}<\mathbf{k}$.

*169. 根据 *139 而作穷举. **附注**：我们所以用 *139 为的是要把 t 代入其中的 $\boldsymbol{b}$ 处. 当 t 为一数字 $\mathbf{k}$ 时, 公式 $\boldsymbol{a}<\mathbf{k} \vee \boldsymbol{a}=\mathbf{k} \vee \boldsymbol{a}>\mathbf{k}$ 可仿 *166 那样由 *137 或 *136 而证出. (对前面 k 个情形用 *(165). 对第 $k+2$ 个情形则有 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}^{(k+1)}=(\boldsymbol{b}')^{(k)}=(\boldsymbol{b}'+0)^{(k)}$ [公理 18, 17] $=\boldsymbol{b}'+\mathbf{k}$ [公理 19, 17].)

这样一来，在缺乏公理模式 13 (甚至公理 14, 15, 20, 21) 但加入公式 *137 或 *136 作为新公理的系统内，下列公式：$\boldsymbol{a}<0 \vee \boldsymbol{a}=0 \vee \boldsymbol{a}>0$, $\boldsymbol{a}<1 \vee \boldsymbol{a}=1 \vee \boldsymbol{a}>1$, $\boldsymbol{a}<2 \vee \boldsymbol{a}=2 \vee \boldsymbol{a}>2$, ⋯的每一个都是可证的，尽管如此，我们却没有理由相信 *139 本身，即公式 $\boldsymbol{a}<\boldsymbol{b} \vee \boldsymbol{a}=\boldsymbol{b} \vee \boldsymbol{a}>\boldsymbol{b}$, 在该系统中是可证的.

如果读者愿意，本节的其余部分可以推迟到恰在 § 49 之前阅读.

在形式符号体系的解释下，一数论函数 $\varphi(x_1, \cdots, x_n)$ 都由一项 $t(x_1, \cdots, x_n)$ 来表示.

例 3 在解释之下，函数 $(a+1)^2$ 被项 $(\boldsymbol{a}')\cdot(\boldsymbol{a}')$, $\boldsymbol{aa}+(2\boldsymbol{a}+1)$, 等等所表示.

能够这样地直接被表示的数论函数只是多项式. 但是我们可以把含有其它数论函数的许多命题加以意译使得尽管缺乏一些项来表示这些函数本身，但这些命题仍然可以在形式符号体系内表示出来.

试设 $\varphi(x_1, \cdots, x_n)$为给定的数论函数，又设 $P(x_1, \cdots, x_n, w)$为谓词 $\varphi(x_1, \cdots, x_n) = w$，叫做函数 $\varphi(x_1, \cdots, x_n)$ 的代表谓词. 如果在系统中谓词 $P(x_1, \cdots, x_n, w)$ 被公式 $\mathrm{P}(\mathrm{x}_1, \cdots, \mathrm{x}_n, \mathrm{w})$ 所表示，而谓词 $C(x)$ 被 $\mathrm{C}(\mathrm{x})$ 所表示，则 $C(\varphi(x_1, \cdots, x_n))$ 便被 $\exists \mathrm{w}(\mathrm{P}(\mathrm{x}_1, \cdots, \mathrm{x}_n, \mathrm{w}) \& \mathrm{C}(\mathrm{w}))$ 所表示(亦被 $\forall \mathrm{w}(\mathrm{P}(\mathrm{x}_1, \cdots, \mathrm{x}_n, \mathrm{w}) \supset \mathrm{C}(\mathrm{w}))$所表示).

这便暗示了，如果一函数的代表谓词在一系统内是可表示的，那末我们可以希望有关该函数的理论可以在该系统内表示并发展，并恰和能够找出表示该函数的项那样. 证实这种猜想的元数学探究将在以后处理 (§ 74).

现在(以及在§ 49 处)我们要问，什么函数其代表谓词是可表示的，亦即什么函数是'可代表的'. 上面我们只谈论到符号体系的解释，但现在我们要对函数的代表性引进一个概念，正如对谓词的表达式我们需引进'数字地可表示性'那样.

一谓词 $P(x_1, \cdots, x_n, w)$ 能够为一(单值)函数 $\varphi(x_1, \cdots, x_n)$的代表谓词其充分必要条件是，对每个 n 元序组 $x_1, \cdots, x_n$ 都有唯一的 w 使得 $P(x_1, \cdots, x_n, w)$ 成立. 当这条件成立时，被代表的函数 $\varphi(x_1, \cdots, x_n)$ 便可以由谓词 $P(x_1, \cdots, x_n, w)$ 而'摹状地'定义为: 使得 $P(x_1, \cdots, x_n, w)$ 成立的 w.

今在关于字母方面的通常条件下(§ 40 首及 § 33 末)引入"$\exists ! \mathrm{x} \mathrm{A}(\mathrm{x})$"作为 $\exists \mathrm{x}[\mathrm{A}(\mathrm{x}) \& \forall \mathrm{y}(\mathrm{A}(\mathrm{y}) \supset \mathrm{x}=\mathrm{y})]$的缩写(读为"有唯一的 x 使得 A(x)"). 因此，如果谓词 $P(x_1, \cdots, x_n, w)$ 被公式 $\mathrm{P}(\mathrm{x}_1, \cdots, \mathrm{x}_n, \mathrm{w})$所表示，则 $P(x_1, \cdots, x_n, w)$为一代表谓词的条件便可表成下公式 $\forall \mathrm{x}_1 \cdots \forall \mathrm{x}_n \exists ! \mathrm{w} \mathrm{P}(\mathrm{x}_1, \cdots, \mathrm{x}_n, \mathrm{w})$，简单地表为 $\exists ! \mathrm{w} \mathrm{P}(\mathrm{x}_1, \cdots, \mathrm{x}_n, \mathrm{w})$，这里对 $\mathrm{x}_1, \cdots, \mathrm{x}_n$ 作全称性解释 (§ 32).

如果 x, y 及 z 为不同的变元，A(x) 为一公式，t, r 与 s 为

项，Γ 为一些不含自由 x 的公式，y, z, r, s, t 对 A(x) 中的 x 是自由的，z 与 x 不出现于 t 中，y 与 z 不自由出现于 A(x) 中，则有：

*170. 如果 Γ, A(t), A(x)$\vdash$t = x，而自由变元对 A(x) 是保持固定的，则 Γ, A(t)$\vdash\exists!$xA(x).

*171. $\vdash\exists!$x(t = x).

*172. A(r), A(s), $\exists!$xA(x)$\vdash$r = s.

*173. r $\neq$ s, A(r), $\exists!$xA(x)$\vdash\neg$A(s).

(∃! 的性质.)

*174a. A(t) & $\forall$z (z < t$\supset\neg$A(z))$\vdash\exists!$y [A(y) &$\forall$z (z < $y\supset$ $\neg$A(z))].

*174b. $\vdash\exists$y[A(y)&$\forall$z(z < y$\supset\neg$A(z))] ~ $\exists!$y[A(y)&$\forall$z(z<y $\supset\neg$A(z))].

(满足 A(x) 的最小 x 的唯一性.)

证明 *174a. 用 *170, *139. 参看 *169 的证明中的附注.

我们说一直觉的数论函数 $\varphi(x_1, \cdots, x_n)$ 在形式系统内是数字地可代表的，如果有一公式 $\mathrm{P}(\mathrm{x}_1, \cdots, \mathrm{x}_n, \mathrm{w})$，其中除不同变元 $\mathrm{x}_1, \cdots, \mathrm{x}_n$, w 外没有其它自由变元，而且对于自然数的每一 n 元序组 $x_1, \cdots, x_n$，都有：

(v) 如果 $\varphi(x_1, \cdots, x_n) = w$，则$\vdash\mathrm{P}(\mathbf{x}_1, \cdots, \mathbf{x}_n, \mathbf{w})$,

(vi) $\vdash\exists!$w$\mathrm{P}(\mathbf{x}_1, \cdots, \mathbf{x}_n, \mathrm{w})$.

在这情形下，公式 $\mathrm{P}(\mathrm{x}_1, \cdots, \mathrm{x}_n, \mathrm{w})$ 便数字地代表了函数$\varphi(x_1, \cdots, x_n)$(变元间带有显然的对应).

对这概念所作的有穷性的(即直觉主义的)使用将限于下列情况：对函数 $\varphi(x_1, \cdots, x_n)$ 有一个计算过程(§ 30)使得对于任何给定的 $x_1, \cdots, x_n$ 都可以找出(v)中的 w(或以这可作为不明说的假设).

如果 $\varphi(x_1, \cdots, x_n)$ 被 $\mathrm{P}(\mathrm{x}_1, \cdots, \mathrm{x}_n, \mathrm{w})$所数字地代表，则后者亦数字地表示函数 φ 的代表谓词 $P(x_1, \cdots, x_n, w)$. 事实上，由 (v) (vi) 可以推得，对于每个 w 都有：

(vii) 如果 $\varphi(x_1,\cdots,x_n)\neq w$,则 $\vdash\neg P(\mathbf{x}_1,\cdots,\mathbf{x}_n,\mathbf{w})$,

推出的方法如下,试取 (v) 中的 **w** 作为 *173 中的 r, (vii) 中的 **w** 作为 *173 中的 s. 再用*(164)来得出 $r\neq s$ 的可证性.

反之,我们没有理由相信,如果对每个 w 都有 (vii),再加上(v)便必然得出 (vi).

我们用 ∃! 记号来简述 (vi). $\exists!xA(x)$ 等价于 $\exists xA(x)\&\forall x\forall y(A(x)\&A(y)\supset x=y)$,其中第一部分表示存在性,第二部分表示唯一性. (vi) 的表示存在性部分已可由 (v) 推得;所以 (vi) 所增加的只是唯一性这部分.

在函数的数字地代表性中(正如在谓词的数字地表示性中)我们只限于考虑在特殊变目处的值而并不考虑其一般性质. 从这方面说来,本问题和非形式算术中的计算问题相似.

例如,在'数字地代表性'的定义中,我们并不要求,当把 $x_1,\cdots,x_n$ 作为形式变元时公式 $\exists!wP(x_1,\cdots,x_n,w)$ 是可证的. 这要求比我们所要求的强得多了,我们只要求对于每个 $\mathbf{x}_1,\cdots,\mathbf{x}_n$,如果把 $x_1,\cdots,x_n$ 作为直觉的变元时,(vi) 都是成立的,而由该要求作代入(§ 32 *66,把 $\mathbf{x}_1,\cdots,\mathbf{x}_n$ 作为 $t_1,\cdots,t_n$) 便可以得到我们的要求. 该加强的条件 (除去 (v)) 将是 § 74 所发展的理论所必需的先决条件. 对我们现在所讨论的六个函数言,我们亦可以立刻得到该加强的条件的.

函数

*(175) a', *(176) $a+b$, *(177) ab

可分别由公式 $\boldsymbol{a'=b}$, $\boldsymbol{a+b=c}$, $\boldsymbol{ab=c}$ 而数字地代表.

证明 *(176). 根据 *171 及代表公式 $\boldsymbol{a+b=c}$ 的样子立刻可得 (vi) (甚至有 $\vdash\exists!\boldsymbol{c}(\boldsymbol{a+b=c})$). 对 (v) 我们必须证明,就任意两个自然数 a,b 言,如果 $c=a+b$,则 $\vdash\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{c}$. 例如,设 $a=2, b=3$ (因而 $c=5$),我们便有 $\vdash\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{c}$ (即 $\vdash 0''+0'''=0'''''$) 正如例 2 中对 (i) 那样.

*(177) 仿上. 对 (v) 的证明可写成就 b 而作直觉的归纳. **归纳推步**: 设 $c=ab, d=ab'(=ab+a=c+a)$. 则 $\vdash\mathbf{ab'}=$

ab + **a** [公理 21] = **c** + **a** [归纳假设, *104] = **d** [由 *(176) 的 (v)].

一些一般原则将可指导我们对以后各例的处理. 没有逻辑符号的公式叫做素公式,在这里便是指 s = t, 而 s, t 为项.

(A) 每个闭素公式都是形式地可判定的(并且 s = t 是可证的或可驳的视在 0, ′, +, · 的通常解释下, 项 s 与 t 表示同一的或不同的数而定). 每个素公式都是数字地可判定的.

证明 用 *(176), *(177), § 38 定理24及 *(164).

例 4 设 s=t 为 $0''' \cdot 0'''' + 0' = (0''' \cdot 0'')''$, 或缩写为 $3 \cdot 4 + 1 = (3 \cdot 2)''$. 因为 $\vdash 3 \cdot 4 + 1 = (3 \cdot 2)'' \sim 12 + 1 = (3 \cdot 2)''$ [因由 *(177), $\vdash 3 \cdot 4 = 12$] $\sim 13 = (3 \cdot 2)''$ [因由 *(176), $\vdash 12 + 1 = 13$] $\sim 13 = 8$ [因由 *(177), $\vdash 3 \cdot 2 = 6$; 并注意 $6''$, 即 $(0'''''')''$, 为 8]. 但由 *(164), $\vdash \neg 13 = 8$. 故 $\vdash \neg 3 \cdot 4 + 1 = (3 \cdot 2)''$. 这里当我们根据链方法而推出 $\vdash 3 \cdot 4 + 1 = (3 \cdot 2)'' \sim 13 = 8$ 时我们已暗中用了定理 24(b) 或其系 1, 及 § 26 *21; 又在把这结论和 $\vdash \neg 13 = 8$ 合并而推 $\neg\ 3 \cdot 4 + 1 = (3 \cdot 2)''$ 时, 我们用了 *30, *18b, 或 *20 及定理 6 系.

(B) 设 $P(x_1, \cdots, x_n)$ 为一公式只以不同变元 $x_1, \cdots, x_n$ 为自由变元, 又假设 $P(x_1, \cdots, x_n)$ 是数字地可判定的(并且它数字地表示 $P(x_1, \cdots, x_n)$). 则有: 如果 $t_1, \cdots, t_n$ 为不含变元的项(因此表示数 $t_1, \cdots, t_n$), 则 $P(t_1, \cdots, t_n)$ 是可判定的 (而 $P(t_1, \cdots, t_n)$ 是可证的或可驳的视 $P(t_1, \cdots, t_n)$ 是真的或假的而定). 如果 $t_1, \cdots, t_n$ 为项, 对 $P(x_1, \cdots, x_n)$ 中的 $x_1, \cdots, x_n$ 是自由的, 则 $P(t_1, \cdots, t_n)$ 是数字地可判定的[1].

证明同 (A). (A) 实即 (B) 的特殊情况, 即当 $P(x_1, \cdots, x_n)$ 为 $x_1 = x_2$ 时的特殊情况.

(C) 一公式如由闭的可判定公式只应用命题演算的运算子 ⊃, &, ∨, ¬ 组成, 则它是可判定的(它为可证的或可驳的可用 § 28

1) 即若把公式 $P(t_1, \cdots, t_n)$ 中的自由变元代以数字, 每一次或者所得的公式或者它的否定必是可证的 —— 俄译注.

的古典二值位表而定，只须把 t 与 f 分别作为"可证"及"可驳".)

由 § 29 引理 13 及 § 25 定理3得证.

(D) 因此：每一个没有变元的公式是可判定的. 每一个没有量词的公式是数字地可判定的.

(E) 设 $A(x_1, \cdots, x_n, y)$ 为一个数字地可判定的公式，只以不同的变元 $x_1, \cdots, x_n, y$ 为自由变元；又设 z 为一变元，与 $x_1, \cdots, x_n, y$ 均不同. 则 $\forall y(y < z \supset A(x_1, \cdots, x_n, y))$ 及 $\exists y(y < z \& A(x_1, \cdots, x_n, y))$ 是数字地可判定的(而 $\forall y(y < \mathbf{z} \supset A(\mathbf{x}_1, \cdots, \mathbf{x}_n, y))$ 是可证的或可驳的视公式 $A(\mathbf{x}_1, \cdots, \mathbf{x}_n, 0)$, $A(\mathbf{x}_1, \cdots, \mathbf{x}_n, 1)$, $\cdots$, $A(\mathbf{x}_1, \cdots, \mathbf{x}_n, \mathbf{z}-1)$ 全是可证的或有些是可驳的而定；$\exists y(y < \mathbf{z} \& A(\mathbf{x}_1, \cdots, \mathbf{x}_n, \mathbf{y}))$ 是可证的或可驳的视它们有些是可证的或全是可驳的而定). 若以≤代<亦同此.

证明(对<) 用 *166, *167, *(165)(又 § 27 *58b, §35*86).

今考虑两整数的除法，a 除以 b. 例如，$13 = 5 \cdot 2 + 3$ 而 $3 < 5$. 若用文字叙述便是，当 13 除以 5 时，商为 2 而剩余为 3. 通常，对于除法因而对于商函数 $[a/b]$ 及剩余函数 $\text{rm}(a, b)$ 都只是对 $b \neq 0$ 而作定义的. 为了避免讨论部分地有定义的函数的困难，我们把定义推广到 $b = 0$ 的情形，而令 $[a/0] = 0$ 及 $\text{rm}(a, 0) = a$. 这样，规律 $a = b[a/b] + \text{rm}(a, b)$ 仍然成立. 于是 $b|a$("b 除尽 a") 当且仅当 $\text{rm}(a, b) = 0$

函数

*(178) $[a/b]$ 　　　　*(179) $\text{rm}(a, b)$

可分别由两公式 $Q(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{q})$ 及 $R(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{r})$ 而数字地代表，并且对于任何数字 $\mathbf{q}$ 及 $\mathbf{r}$ 都有：

*178a. $Q(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \mathbf{q}) \vdash \exists ! \boldsymbol{q} Q(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{q})$.

*179a. $R(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \mathbf{r}) \vdash \exists ! \boldsymbol{r} R(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{r})$.

证明 *(179) 及 *179a[1]. 设 $S(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{r})$ 为公式

$$\exists \boldsymbol{q}(\boldsymbol{q} \leqslant \boldsymbol{a} \& \boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}\boldsymbol{q} + \boldsymbol{r} \& \boldsymbol{r} < \boldsymbol{b}) \vee (\boldsymbol{b} = 0 \& \boldsymbol{r} = \boldsymbol{a}).$$

1) 要讨论 *(178) 及 *178a，可把 $Q(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{q})$ 取为下公式 (参见下文 *178b)：$\exists \boldsymbol{r}(\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}\boldsymbol{q} + \boldsymbol{r} \& \boldsymbol{r} < \boldsymbol{b}) \vee (\boldsymbol{b} = 0 \& \boldsymbol{q} = 0)$——根据俄译注.

再令 $R(a, b, r)$ 为

$$S(a, b, r) \& \forall e(e < r \supset \neg S(a, b, e)).$$

这时 *179a 可直接由 *174a (把 $\mathbf{r}$ 作为 t)而推得.

要对 *(179) 而证 (v), 可考虑任何两数 a 与 b, 并令 $r = \mathrm{rm}(a, b)$ 及 $q = [a/b]$. **情形 1**: $b \neq 0$. 因 $a = bq + r$; 故由(A), $\vdash \mathbf{a} = \mathbf{bq} + \mathbf{r}$. 又 $r < b$; 故由*(165), $\vdash \mathbf{r} < \mathbf{b}$. 由 & 引 (或 (C)), $\vdash \mathbf{a} = \mathbf{bq} + \mathbf{r} \& \mathbf{r} < \mathbf{b}$. 但 $q \leqslant a$; 故由(E)得 $\vdash \exists q(q \leqslant \mathbf{a} \& \mathbf{a} = \mathbf{b}q + \mathbf{r} \& \mathbf{r} < \mathbf{b})$. 由 $\vee$ 引得 $\vdash \exists q(q \leqslant \mathbf{a} \& \mathbf{a} = \mathbf{b}q + \mathbf{r} \& \mathbf{r} < \mathbf{b}) \vee (\mathbf{b} = 0 \& \mathbf{r} = \mathbf{a})$, 即 $\vdash S(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{r})$. 令设 e 为任何小于 r 的数. 则 $e < b$ (故由*(165), $\vdash \mathbf{e} < \mathbf{b}$). 对任何数 p 都有 $a \neq bp + e$(因 q, r 是仅有的一对数而能使 $r < b$ 及 $a = bq + r$ 的); 故由 (A) 得 $\vdash \neg \mathbf{a} = \mathbf{bp} + \mathbf{e}$. 故由 (C), $\vdash \neg(\mathbf{a} = \mathbf{bp} + \mathbf{e} \& \mathbf{e} < \mathbf{b})$. 在特例中, 这对 $p = 0, 1, \cdots, a$ 都成立; 故由 (E) 得 $\vdash \neg \exists q(q \leqslant \mathbf{a} \& \mathbf{a} = \mathbf{b}q + \mathbf{e} \& \mathbf{e} < \mathbf{b})$. 但 $b \neq 0$; 故由 *(164) 得 $\vdash \neg \mathbf{b} = 0$. 由 *(164), 或 $\vdash \mathbf{e} = \mathbf{a}$ 或 $\vdash \neg \mathbf{e} = \mathbf{a}$. 合并这些结果, 由(C)得 $\vdash \neg(\exists q(q \leqslant \mathbf{a} \& \mathbf{a} = \mathbf{b}q + \mathbf{e} \& \mathbf{e} < \mathbf{b}) \vee (\mathbf{b} = 0 \& \mathbf{e} = \mathbf{a}))$, 即 $\vdash \neg S(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{e})$. 这对于任何 $e < r$ 是真的, 即对 $e = 0, 1, \cdots, r - 1$ 是真的; 故由 (E) 得 $\vdash \forall e(e < \mathbf{r} \supset \neg S(\mathbf{a}, \mathbf{b}, e))$. 由这及 $\vdash S(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{r})$ 及 & 引得 $\vdash S(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{r}) \& \forall e(e < \mathbf{r} \supset \neg S(\mathbf{a}, \mathbf{b}, e))$, 即 $\vdash R(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{r})$, 这便是所要证明的. **情形 2**: $b = 0$. 仿此. (综括起来: 根据 $R(a, b, r)$ 的样式, 由(A), *(165), (C) 及 (E) 得: $R(a, b, r)$ 是数字地可判定的. 再由与解释相平行的形式步骤, 我们可核验出, 当 $r = \mathrm{rm}(a, b)$ 时, 公式 $R(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{r})$ 是可证明的而不是可驳的.)

对 *(179) 的 (vi) 可如下而得: 在 *179a 中把任意数字 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 代入 a, b 处再应用 (v).

函数

*(180) $\mathrm{rm}(c, (i' \cdot d)')$

可由一公式 $B(c, d, i, w)$ 而数字地代表, 并且对任何数字 $\mathbf{w}$ 都有:

*180a. B(c,d,i,**w**)$\vdash$—∃!wB(c,d,i,w).

证明 令"c","d","i","v","w"分别表示 ***c***, ***d***, ***i***, ***q***, ***r***;并令 B(c, d, i, w) 为 R(c, (i′·d)′, w). 再用 *179a,代入(*66), *(179) 及 (B) 便得.

上面的处理并没有给出加强的性质,即对数字地代表 $[a/b]$, rm(a, b) 及 rm(c, (i'·d)′) 的公式言,并没有$\vdash$—∃!wP(x_1,···, x_n, w). 但若应用 *146a 及 *146b(以及 *123, *140, *141, *142a 和 *143a) 这点亦是可以证得的,并且可以给出与前相等价的但更简单的代表公式.

*178b. $\vdash$—Q($\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{q}$) ~ ∃$\boldsymbol{r}$($\boldsymbol{a}$ = $\boldsymbol{bq}$ + $\boldsymbol{r}$&$\boldsymbol{r}$ < $\boldsymbol{b}$) ∨ $\boldsymbol{b}$ = $\boldsymbol{q}$ = 0.

*179b. $\vdash$—R($\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{r}$) ~ ∃$\boldsymbol{q}$($\boldsymbol{a}$ = $\boldsymbol{bq}$ + $\boldsymbol{r}$&$\boldsymbol{r}$<$\boldsymbol{b}$) ∨ ($\boldsymbol{b}$=0&$\boldsymbol{r}$ = $\boldsymbol{a}$).

*180b. $\vdash$—B(c,d,i,w) ~ ∃v(c = (i′·d)′·v + w&w < (i′·d)′).

*178c. $\vdash$—∃!$\boldsymbol{q}$Q($\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{q}$). *179c. $\vdash$—∃!$\boldsymbol{r}$R($\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{r}$).

*180c. $\vdash$—∃!wB(c,d,i,w).

引理 18a 本节的结果*(164)—*180c及(A)—(E),除却*169 及 *174a (这两者当 t 非数字时), *174b, *178b, c, *179b, c, *180b, c 以外, 对下述的形式体系仍然成立: 除去公理模式 13, 但加入 *104—*107 以及 *137 或 *136 的公式作为补充的特殊数论公理. ("罗宾孙系统").

§ 42. 哥德尔定理

根据普列斯堡格 (Presburger) 1930 的结果,就删掉关于·的形成规则及公理的那个形式系统[1]言,其无矛盾性、完备性的元数学证明,乃至一个判定过程是可以给出的. (参见 § 79 例 2[2]. 普氏只处理关于整数算术的一个古典系统, 但希尔伯特—伯尔奈斯 [1934], 359 页以后,修改他的方法使适用于基本上同于这里的古

1) 这个形式系统可理解为本书第四章里的那个形式系统,但其中关于·的形成规则及公理均必须删去——译者注.

2) 亦参见俄译本书末附录 IV.

典系统，而洛斯（Joan Ross）核验了该修改同样可适用于直觉主义系统.)

对整个系统（或者基本上等价于它的系统）言;这些问题却是极端不易处理的.阿克曼[1924—5]及冯纽曼[1927]所作的无矛盾性证明所得的结果是：当使用归纳公设(公理模式 13)时,必须归纳变元 x 不自由出现于归纳公式 A(x) 的某一量词的辖域内，这样该系统才能证明是无矛盾的.（参考 § 79 定理 55. 这个限制排斥了我们对 *165，*136 及 *148 的证明.)

这种难于处理的情况在[1931]由哥德尔的"数学原理及有关系统中的形式不可判定命题"一文的两条著名定理的出现而得到阐明. 我们把第一条定理叫做"哥德尔定理"而以第二条定理作为它的系，但它实则只是该作者的一系列的重要贡献之一. 这两条定理已经在这部门中受到最广泛的注意并且影响到元数学的整个规划及哲学.

在本书中上面所叙述的元数学结果或多或少地都是沿着该系统的解释所暗示的道路而达到的. 哥德尔的结果是借助于一种元数学的推理，这种推理更深刻地贯穿于作为一个客体体系的形式系统的结构中.

正如 § 16 所说的，我们所研究的形式体系中的客体是各种形式符号,形式表达式(即形式符号的有穷序列),以及形式表达式的有穷序列. 一开始便给出可数无穷多个形式符号. 因此依照 § 1 的方法，形式客体组成一个可数集. 如果对它们明指一个特殊的枚举法，并把我们的元数学叙述改就其标码来叙述而不就所枚举的客体本身来叙述，则元数学便变成数论的一个分支. 因此便出现一个可能,即形式体系中应该包含一些公式,当就该枚举法的眼光看来,它们表示它的元数学中一些命题.

进一步研究时还可看出，可以利用这个可能性结合康托的对角线方法（§ 2）而作出一个闭公式 A，如果由一个认识该枚举法的人加以解释,它断定它自己的不可证性.

公式 A 与埃皮曼尼得诗论（§ 11）的命题十分相似. 但这里

我们却有办法避免悖论．根据A的构作，

(1)　　　　A意指A是不可证的．

试假设，如我们所希望的，在本系统内一个表示假命题的公式是不可证的，即

(2)　　　　假公式是不可证的．

这里公式A不能是假的，否则由(1)它不是不可证的，与(2)矛盾．但A可以是真的，只要它是不可证的．的确，必须是这样．因为如果假设A是可证的，由(1)，则A是假的，再由(2)则得A是不可证的了．由(直觉上的)反证法便得出A是不可证的，从而由(1)A是真的．因此这系统是不完备的，亦即它不能够把每个在解释；下为其的那些公式都证出来(如果有(2)，或至少当公式A为假时，A是不可证的)．

这公式的否定¬A亦是不可证的．因为A是真的，故¬A是假的，由(2)，¬A是不可证的．所以在上节所元数学地定义的简单定义下，这系统亦是不完备的(如果有(2)，或至少当公式A与¬A为假时它们是不可证的)．

上面当然只是哥德尔推理的一个初步的权宜的(henristic)解说．由于这个直觉论证的本质是这样地接近悖论但却未碰到悖论，所以哥德尔定理的严格的有穷性的元数学证明必须给以很高的估价．当我们充分详细地检查这个元数学证明时，可以看出它具有通常数学的特性．的确，如果把我们的元数学限于只讨论枚举时的标码，从而成为数论的一个部分(非形式的而不是形式的理论)，并忽略客体系统(现在是数的系统)的解释，那末其定理便变成通常初等数论的命题了．这时它的证明尽管非常长而费劲，但却不能加以任何反对，否则将同样地影响到传统数学的一部分，而后者却已经被视为最可靠的．

若借用下两章的结果作为引理，我们现在便可以给出严格的元数学的证明．我们对引理及定理的编号是依照逻辑的次序的[1]．

---

1) 依逻辑次序须先证§49的定理27及§52的引理19，20，才能证下文的引理定理，故下文的引理定理的编号为引理21与定理28——译者注。

在作出枚举形式客体这个观念时，实际的考虑指示我们，形式客体的标码与客体相应的规则须尽可能的简单．我们可以把上述的权宜的论证作一个（非本质的）修整，不用通常意义的枚举而用自然数来作具有空隙的枚举，即不同的自然数对应于不同的形式客体，但并不是所有的自然数都用来对应．我们把这种对应叫做哥德尔编号，而一形式客体所对应的数叫做它的哥德尔数，（有时对形式符号，形式表达式与形式表达式的有穷序列采用各别的哥德尔编号．这样，当我们说到一符号的哥德尔数或一表达式的哥德尔数或一表达式的有穷序列的哥德尔数时便指着不同的对应.）

对任意一个明指的哥德尔编号言，如果 n 是一公式的哥德尔数，我们便以“A_n”指定该公式，（如果 n 无此性质，我们无需定义 A_n.）我们亦可以把这公式 A_n 写为“$\mathrm{A}_n(\boldsymbol{a})$”，指出其中的自由变元 $\boldsymbol{a}$，以便使用我们的代入记法（§ 18）.

引理 21 可以对形式客体作一哥德尔编号，使得如下地定义的谓词 $A(a, b)$ 及 $B(a, c)$ 在形式体系内是数字地可表示的（§ 41）.

$A(a, b)$： a 是一公式（即 $\mathrm{A}_a(\boldsymbol{a})$）的哥德尔数，而 b 是公式 $\mathrm{A}_a(\mathbf{a})$ 的证明的哥德尔数.

$B(a, c)$： a 是一公式（即 $\mathrm{A}_a(\boldsymbol{a})$）的哥德尔数，而 c 是公式 $\neg\mathrm{A}_a(\mathbf{a})$的证明的哥德尔数.

今设对引理中所给出的哥德尔编号言，谓词 $A(a, b)$ 及 $B(a, c)$ 分别由两公式 $\mathrm{A}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ 及 $\mathrm{B}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c})$ 所数字地表示[1]．当我们对引理作了证明以后，公式 $\mathrm{A}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ 及 $\mathrm{B}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c})$ 实际上是可以作出的(见 § 52).

今考虑公式 $\forall \boldsymbol{b} \neg \mathrm{A}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$，它只含自由 $\boldsymbol{a}$ 不再含别的自由变元．这公式有一哥德尔数，记为 p，因此这公式和我们所指定的公式“$\mathrm{A}_p(\boldsymbol{a})$”是一样的．今考虑公式 $\mathrm{A}_p(\mathbf{p})$，即

1) 由 319 页脚注，我们可把数字地表示 $A(a, b)$ 及 $B(a, c)$ 的那些公式中的自由变元取为 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 及 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}$ ——俄译注.

$A_p(\mathbf{p})$: $\forall \boldsymbol{b} \neg A(\mathbf{p}, \boldsymbol{b})$,

这公式不含自由变元. 注意我们已经用了康托的对角线法，并在 $A_p(\boldsymbol{a})$ 中把 $\boldsymbol{a}$ 代以数字 $\mathbf{p}$ 而得到这个公式.

为与上述的初步的权宜性论证相连系起见，我们可依哥德尔编号的观点而把公式 $A_p(\mathbf{p})$ 解释为以下命题: $A_p(\mathbf{p})$ 是不可证的,即它便是所求的断定自己不可证性的公式 A.

在上述权宜性论证中所作的假设,即如果 A 或$\neg$A 为假,它便不能在系统内证明，在现在的元数学论证中便应换以一个元数学的等价假设,就如果 A 假则 A 不能证而言,这个等价物就是系统的(简单)无矛盾性(§ 28). 就如果$\neg$ A 假则$\neg$ A 不能证而言，我们需要一个更强的条件,叫做 ω 无矛盾性,它可定义如下.

一个形式系统(或一个具有类似的形成规则的系统)叫做 ω 无矛盾的,如果没有变元 x 及公式 A(x) 使得下列各命题全真:

$$\vdash A(0), \vdash A(1), \vdash A(2), \cdots; \quad \vdash \neg \forall x A(x)$$

(换句话说,如果不是既 $\vdash \neg \forall x A(x)$,又对每个自然数 n 都有$\vdash A(\mathbf{n})$.) 反之，如果对某个 x 及 A(x) 使得所有 A(0), A(1), A(2), $\cdots$以及$\neg \forall x A(x)$ 全是可证的,则该系统叫做 ω 矛盾的.

注意, ω 无矛盾性蕴涵简单无矛盾性,因为如果 A 为任何一个不含自由变元的可证公式,则可把它写成“A(x)”,而 x 为一变元,这时所有 A(0), A(1), A(2), $\cdots$ 都是可证的(依我们 § 18 的代入记法,这些都简单地就是 A);因此如果这系统是 ω 无矛盾的,则$\neg \forall x A(x)$ 便是不可证公式的一例(参见 § 28).

定理 28 如果数论形式系统是(简单)无矛盾的,则没有$\vdash A_p(\mathbf{p})$;如果该系统是 ω 无矛盾的，则没有$\vdash \neg A_p(\mathbf{p})$. 因此，如果该系统是 ω 无矛盾的,则它是(简单)不完备的,而 $A_p(\mathbf{p})$ 便是不可判定的公式的一例. (哥德尔定理原来形式.)

先证如果该系统是无矛盾的,则没有 $\vdash A_p(\mathbf{p})$. (为直觉上的反证法起见)设 $\vdash A_p(\mathbf{p})$,即设 $A_p(\mathbf{p})$ 是可证的. 由此就有它的一个证明; 设该证明的哥德尔数为 k. 故 $A(p, k)$ 为真. 既然在引理中把 $A(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ 作为数字地表示 $A(a, b)$ 的公式而引入，故

得$\vdash$A(p,k). 由∃引得$\vdash\exists b$A(p,b). 再由 *83a 得$\vdash\neg\forall b\neg$A(p, b),而这便是$\vdash\neg A_p$(p). 与我们的假设$\vdash A_p$(p) 合并,便和该系统的无矛盾性的假设矛盾. 故由反证法得: 没有$\vdash A_p$(p),这便是所要证明的.(我们亦可以由$\vdash A_p$(p) 出发,应用∀消得$\vdash\neg$A(p, k),从而与无矛盾性假设相矛盾.)

再证如系统是ω无矛盾的(因而是无矛盾的),则没有$\vdash\neg A_p$(p). 由无矛盾性及本定理的第一部分可知 A_p(p) 不是可证的. 故每个自然数 0, 1, 2, …都不是 A_p(p) 的证明的哥德尔数; 即 $A(p,0)$, $A(p,1)$, $A(p,2)$, ···全是假的,既然 A(a, b) 数字地表示 $A(a,b)$, 故得$\vdash\neg$A(p, 0), $\vdash\neg$A(p, 1), $\vdash\neg$A(p, 2), ···. 因而由ω无矛盾性可知没有$\vdash\neg\forall b\neg$A(p, b),亦即没有$\vdash\neg A_p$(p),这便是所要证明的.

我们先给出这定理的哥德尔的原来形式,因为其证明在直觉上较为简单而且是沿着上述的权宜方式进行的.罗歇[1936]指出,如果把不可判定公式取得较为复杂一些,则ω无矛盾性的假设可以除去,只由简单无矛盾性便可以推出不完备性了. 试考虑公式 $\forall b[\neg A(a,b)\vee\exists c(c\leqslant b\,\&\,B(a,c))]$. 设其哥德尔数为 q. 今考虑公式 A_q(q),即

A_q(q): $\qquad\forall b[\neg A(q,b)\vee\exists c(c\leqslant b\,\&\,B(q,c))]$.

依哥德尔编号观点可把公式 A_q(q) 解释为下述的断定: 对 A_q(q) 的任何证明言,都有一个$\neg A_q$(q) 的证明而该证明具有相等的或更小的哥德尔数,由于假设了简单无矛盾性,这便蕴涵了 A_q(q) 是不可证的.

定理 29 如果数论形式系统是(简单)无矛盾的,则既没有$\vdash A_q$(q),也没有$\vdash\neg A_q$(q);即如果该系统是无矛盾的,它便是(简单)不完备的,以 A_q(q) 为不可判定的公式之一.(罗歇形的哥德尔定理.)[1)]

1) 实质上这里不但证明了第四章的形式系统 S 的不完备性,而且证明了它的不可补足性. 的确,试设 S_1 为系统 S 的加强系统,且是无矛盾的. 正和对 S 一样,引理 21 对 S_1 也成立. 引理(应用于 S_1 时)中所提到的谓词记为 $A_1(a,b)$ 及 $B_1(a,c)$ (因为在定义中出现了"在 S_1 中可证性",故与前不同了); 数字地表示这

先证如果该系统是无矛盾的，则没有$\vdash \mathrm{A}_q(\mathbf{q})$. 设$\vdash \mathrm{A}_q(\mathbf{q})$. 如前(但以 q 代 p) 有 $\vdash \mathrm{A}(\mathbf{q}, \mathbf{k})$. 又在我们的无矛盾性的假设下，$\vdash \mathrm{A}_q(\mathbf{q})$ 的假设蕴涵着没有 $\vdash \neg \mathrm{A}_q(\mathbf{q})$，即 $\neg \mathrm{A}_q(\mathbf{q})$ 是不可证的. 因此，特别是，$B(q, 0)$，$B(q, 1)$，$\cdots$，$B(q, k)$ 全是假的. 又因 $\mathrm{B}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ 数字地表示 $B(a, b)$，故有 $\vdash \neg \mathrm{B}(\mathbf{q}, 0)$，$\vdash \neg \mathrm{B}(\mathbf{q}, 1)$，$\cdots$，$\vdash \neg \mathrm{B}(\mathbf{q}, \mathbf{k})$. 故由 *166a 得 $\vdash \forall \boldsymbol{c}(\boldsymbol{c} \leqslant \mathbf{k} \supset \neg \mathrm{B}(\mathbf{q}, \boldsymbol{c}))$. 这与$\vdash \mathrm{A}(\mathbf{q}, \mathbf{k})$ 合并，再由 & 引及 $\exists$ 引得$\vdash \exists \boldsymbol{b}[\mathrm{A}(\mathbf{q}, \boldsymbol{b}) \& \forall \boldsymbol{c}(\boldsymbol{c} \leqslant \boldsymbol{b} \supset \neg \mathrm{B}(\mathbf{q}, \boldsymbol{c}))]$. 故由 *58b 及 *86 (及替换定理 14 系 1——译者) 得 $\vdash \exists \boldsymbol{b}[\mathrm{A}(\mathbf{q}, \boldsymbol{b}) \& \neg \exists \boldsymbol{c}(\boldsymbol{c} \leqslant \boldsymbol{b} \& \mathrm{B}(\mathbf{q}, \mathbf{c}))]$. 故由 *57b (及 *70) 得 $\vdash \exists \boldsymbol{b} \neg[\neg \mathrm{A}(\mathbf{q}, \boldsymbol{b}) \vee \exists \boldsymbol{c}(\boldsymbol{c} \leqslant \boldsymbol{b} \& \mathrm{B}(\mathbf{q}, \mathbf{c}))]$. 故由 *85a 得 $\vdash \neg \forall \boldsymbol{b}[\neg \mathrm{A}(\mathbf{q}, \boldsymbol{b}) \vee \exists \boldsymbol{c}(\boldsymbol{c} \leqslant \boldsymbol{b} \& \mathrm{B}(\mathbf{q}, \mathbf{c}))]$. 但这便是 $\vdash \neg \mathrm{A}_q(\mathbf{q})$. 故同前，没有 $\vdash \mathrm{A}_q(\mathbf{q})$，这便是所要证明的.

再证如果该系统是无矛盾的，则没有$\vdash \neg \mathrm{A}_q(\mathbf{q})$. 设有 $\vdash \neg \mathrm{A}_q(\mathbf{q})$，即$\neg \mathrm{A}_q(\mathbf{q})$ 是可证的. 则它有一证明；设这证明的哥德尔数为 k. 则 $B(q, k)$ 为真. 故$\vdash \mathrm{B}(\mathbf{q}, \mathbf{k})$. 由 *168 得$\vdash \forall \boldsymbol{b}[\boldsymbol{b} \geqslant \mathbf{k} \supset \exists \boldsymbol{c}(\boldsymbol{c} \leqslant \boldsymbol{b} \& \mathrm{B}(\mathbf{q}, \boldsymbol{c}))]$. 又如前(但以 q 代 p)有 $\vdash \neg \mathrm{A}(\mathbf{q}, 0)$，$\vdash \neg \mathrm{A}(\mathbf{q}, 1)$，$\cdots$，$\vdash \neg \mathrm{A}(\mathbf{q}, \mathbf{k}-1)$. 由 *166 得$\vdash \forall \boldsymbol{b}[\boldsymbol{b} < \mathbf{k} \supset \neg \mathrm{A}(\mathbf{q}, \boldsymbol{b})]$. 再由 *169 得 $\vdash \forall \boldsymbol{b}[\neg \mathrm{A}(\mathbf{q}, \boldsymbol{b}) \vee \exists \boldsymbol{c}(\boldsymbol{c} \leqslant \boldsymbol{b} \& \mathrm{B}(\mathbf{q}, \mathbf{c}))]$. 但这便是$\vdash \mathrm{A}_q(\mathbf{q})$. 故没有$\vdash \neg \mathrm{A}_q(\mathbf{q})$，这便是所要证明的.

注意，我们并没有直接得出结论说：$\mathrm{A}_p(\mathbf{p})$，$\neg \mathrm{A}_p(\mathbf{p})$，$\mathrm{A}_q(\mathbf{q})$ 及$\neg \mathrm{A}_q(\mathbf{q})$ 是不可证的，我们只是说，如果这系统是(简单)无矛盾的，则 $\mathrm{A}_p(\mathbf{p})$，$\mathrm{A}_q(\mathbf{q})$ 及$\neg \mathrm{A}_q(\mathbf{q})$ 是不可证的，又如果系统是 ω 无矛盾的，则$\neg \mathrm{A}_p(\mathbf{p})$ 是不可证的.

试考虑我们对下事实的证明*[1]，如果系统是无矛盾的，则 A_p

两证明的公式记为 $\mathrm{A}_1(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ 及 $\mathrm{B}_1(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c})$. 今对 S_1 而应用定理 29 可知系统 S_1 是不完备的，故其中含有不可判定的公式 $\mathrm{A}_{q_1}(\mathbf{q}_1)$. 由于这个不可判定的公式可以能行地作出，故系统 S 是能行不可补足的——俄译注.

1) 这里原文用 demonstration 以别于 proof，后者著者用以指形式证明——俄译注. 按在本节中凡原文用 demonstration 处中译本一律加星号以作区别——译者注.

(p)是不可证的．如果再补入这系统的无矛盾性的证明*，列于上述证明*之前，那末便可以得出 $A_p(\mathbf{p})$ 的不可证性的证明*了．

假设这样的 $A_p(\mathbf{p})$ 的不可证性的证明*是存在的，试把形式客体用哥德尔数来表示，我们便可以把它表示为在非形式数论内的一个证明*．我们今问，后面这个证明*能不能够在本系统之内加以形式化．

形式化后，公式 $A_p(\mathbf{p})$ 自身便是所要证明*的东西(即，$A_p(\mathbf{p})$ 是不可证的)的一个形式化的叙述．因此 $A_p(\mathbf{p})$ 不可证性的形式证明*便将是 $A_p(\mathbf{p})$ 的形式证明（注意，原文是 proof——译者）．由定理 28，如果本系统是无矛盾的，则这种证明是不存在的．

因此，如果我们对 $A_p(\mathbf{p})$ 的不可证性有一个非形式的证明*，那末这个证明*将不能在系统之内形式化，如果本系统是无矛盾的的话．所说的非形式证明*将包含两部分，第一部分是系统无矛盾性的证明，第二部分是上而已经给出的证明（定理 28 前半的证明），即如果系统是无矛盾的，那末 $A_p(\mathbf{p})$ 是不可证的．

如果我们能够指出第二部分的确能够在系统内形式化，我们便有一方法来指出第一部分不能在系统内形式化了，如果系统是无矛盾的的话．这便是第二条定理．在叙述这定理以前，我们先扼要重述这个论证．

系统是(简单)无矛盾的这个断定可以通过哥德尔编号而在形式系统内作种种的表示：设 $C(a, b)$ $(D(a, c))$ 为下列谓词：a 是一公式即 A_a 的哥德尔数，而 b 是 A_a 的（c 是 $\neg A_a$ 的)证明的哥德尔数．又存在两公式 $C(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ 及 $D(\boldsymbol{a}, \mathbf{c})$ 分别数字地表示 $C(a, b)$ 及 $D(a, c)$ (§52)．故 § 28 中无矛盾性的原来定义直接可以在形式系统内写成公式 $\neg\exists \boldsymbol{a}[\exists \boldsymbol{b} C(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})\&\exists \mathbf{c} D(\boldsymbol{a}, \mathbf{c})]$．就定义的第二种说法言，由于公式 $\neg 1=0$ 是可证的（公理 15)，故本系统是无矛盾的当且仅当公式 $1=0$ 是不可证的．设 r 为公式 $1=0$ 的哥德尔数，则 $A_r(\mathbf{r})$ 亦为该公式，而无矛盾性便可表为 $\neg\exists \boldsymbol{b} A(\mathbf{r}, \boldsymbol{b})$ 或 $\forall \boldsymbol{b}\neg A(\mathbf{r}, \boldsymbol{b})$．设随便选取这些公式之一并叫做

"Consis".

$A_p(\mathbf{p})$ 是不可证的这断定可通过哥德尔编号而表为 $\forall \boldsymbol{b} \neg A(\mathbf{p}, \boldsymbol{b})$,而这亦即是 $A_p(\mathbf{p})$.

定理 28 前半的直觉证明*便是证明*了

(I) {系统是无矛盾的}蕴涵{$A_p(\mathbf{p})$ 是不可证的}.

要是利用哥德尔编号能够把 (I) 的整个元数学证明*在系统内形式化,则我们应得

(II) $\vdash$ Consis$\supset A_p(\mathbf{p})$.

现在,元数学地设 $\vdash$ Consis. 这时用$\supset$消将会由 (II) 而得 $\vdash A_p(\mathbf{p})$. 由定理 28,如果系统是无矛盾的,那末要得 $\vdash A_p(\mathbf{p})$ 是不可能的. 根据元数学的反证法由此可得如下定理. (这证明亦可建基于定理 29,因有[1] $\vdash \forall \boldsymbol{b} \neg A(\mathbf{q}, \boldsymbol{b}) \supset A_q(\mathbf{q})$.)

定理 30 如果数论形式系统是(简单)无矛盾的,则没有 $\vdash$Consis; 即,如果该系统是无矛盾的,则用可以形式化于系统内的方法不可能导出它的无矛盾性的证明(哥德尔第二定理.)

当我们在第十章中证明了引理 21 后,定理 28 及定理 29 的证明便完毕了. 至于定理 30 的证明,还须设法由 (I) 过渡到 (II). 这是一个把很长的非形式证明加以形式化的一个练习,我们在本书内不想给以那么多的篇幅[2].

希尔伯特-伯尔奈斯 [1939] 就一个形式系统 Z_μ 而作出该形式化(参见 283 页以后,尤其是 306—324 页),因此推得 (324—328 页): 定理 30 对系统 Z 成立,而后者与我们的古典数论系统只有一些非本质的差异(主要在于使用谓词变元,见 § 37 末,以及使用相等性公设,见 § 73).因此定理 30 对我们的古典系统亦成立;若应用哥德尔[1932—33],可推出它对我们的直觉主义系统亦是成立的(至少当 Consis 为 $\forall \boldsymbol{b} \neg A(\mathbf{r}, \boldsymbol{b})$ 或 $\neg \exists \boldsymbol{b} A(\mathbf{r}, \boldsymbol{b})$ 而 $A(a, b)$ 适当地选取时)(参见 §81 定理 60 (b2)及纳尔孙(Nelson) [1947], p. 326—327).

---

1) 由公理 5a 及 *69 推得——俄译注.

2) 又见俄译本附录 I——俄译注.

还可注意，只是当我们把（简单）无矛盾性的原来定义或很相近的等价定义的直接形式化取作公式 Consis 时，我们才须作这个练习．直觉上说，$A_p(\mathbf{p})$ 自身便是 Consis 的等价式之一，这由哥德尔定理的很长的直觉证明便可以知道．因为由定理 28，如果系统是无矛盾的，则 $A_p(\mathbf{p})$ 是不可证的，由 § 28，如果 $A_p(\mathbf{p})$ 是不可证的，则系统是无矛盾的；而 $A_p(\mathbf{p})$ 的不可证性又可由 $A_p(\mathbf{p})$ 本身来表示．

这些结果对元数学的规划具有什么意义呢？我们当然希望形式系统是无矛盾的．如果这样，那末依定理 29，它必然是不完备的．我们不能把非形式数论全部明显地形式化，使得每个命题或它的否定都是由明显表述的公理根据明显表述的规则而得的后承（§ 15）．

如果把上述的（简单）无矛盾性假设从它的有穷性意义来了解，即设该无矛盾性是能够元数学地证明的，那末在下述意义上该系统亦是不完备的：有些可在它之内表达的命题，在有穷性的基础上是真的，却不能形式地证明，$A_p(\mathbf{p})$，$A_q(\mathbf{q})$ 及 Consis 就表示了三个这样的命题．

关于元数学地证明无矛盾性的问题，由定理 30 可以得出下列的后承，即在证明中我们所必须信任的方法，一定有些是在系统内不能形式化的．但这并不先验地排斥了下列要求，即所信任的方法并不包括全部形式化方法，后者有若干方法是我们所不信任的，这才引起形式主义者作出（有关无矛盾性的——译者）证明的企图．但这定理的确向元数学家挑战，要求有穷性证明的方法必须比通常在初等数论中所使用的方法还强．

这定理对完备性问题及无矛盾性问题还有进一步的应用．假设我们的系统是（简单）无矛盾的．则正如定理 28 后半的证明那样，$A_p(\mathbf{p})$ 是不可证的，但却有$\vdash\neg A(\mathbf{p},0)$，$\vdash\neg A(\mathbf{p},1)$，$\vdash\neg A(\mathbf{p},2)$，$\cdots$．因此我们有一公式 $A(x)$（即 $\neg A(\mathbf{p},\boldsymbol{b})$）使得我们有$\vdash A(0)$，$\vdash A(1)$，$\vdash A(2)$，$\cdots$，但没有$\vdash\forall x A(x)$（这是 $A_p(\mathbf{p})$）．对这情况塔斯基［1933a］叫做 ω 不完备性．在这情

形下，如果有$\vdash \neg\forall xA(x)$（这是$\neg A_p(p)$），则该系统是ω矛盾的。由于发现了一系统可以是ω不完备的，因此也揭示了一系统很可能是ω矛盾的而未必是简单矛盾的。如果我们的系统是简单无矛盾的的话，则由我们的系统加入 $\neg A_p(p)$ 作为新公理后肯定地便是这种系统。要看出这新系统是简单无矛盾的，我们应注意，如果在其中可以证出 B 及$\neg$B，则在原来的系统内 B 与$\neg$B 该由 $\neg A_p(p)$而推演出（§ 20 末）；故由$\neg$引，$\neg\neg A_p(p)$ 将是可证的；由$\neg$消（对直觉主义言，由 § 35 定理 17 系的 $IVa_2 \supset IVa_1$）可知 $A_p(p)$是可证的，与定理 28 矛盾。显然地我们还可定义更高级的完备性与无矛盾性。

我们不希望我们的系统是ω矛盾的，即使它是无矛盾的。特别是，如果简单无矛盾性可以元数学地证明，则在解释之下，公式 $\neg A_p(p)$ 将表示一命题，与一个在有穷性基础上为真的命题相矛盾；如果$\neg A_p(p)$ 是可证的，依照希尔伯特-伯尔奈斯 [1939]（282页），我们便说该系统是外部矛盾的，即就有穷性解释而言是矛盾的。因此只靠简单无矛盾性的证明不能保证该形式化数学不会得出一些在直觉上为假的公式。（这是首先由芬斯勒 Finsler [1926] 指出的，他是就一个在我们的意义之下非形式系统而立论的，又参看哥德尔 [1931—2a]。）

假设我们的系统是简单无矛盾的。为简单起见，如果一公式在解释之下表示一个“真”（“假”）的命题，我们便说该公式是“真”（“假”）的。设 B(x) 为一公式，数字地表示了一谓词 $B(x)$，这亦是在解释之下它所表示的。则对每个自然数 x 而言，公式 B($\mathbf{x}$)是可证的当且仅当它是真的。如果公式 $\forall x B(x)$ 是可证的，则它是真的（由于$\forall$消）；但一般说来，逆理不真（例如，$A_p(p)$）。如果 $\exists x B(x)$ 是真的，则它是可证的（由于$\exists$引）；但我们没有元数学地证明其逆命题（例如，$\exists b A(p, b)$，由它根据 *83a 可推出$\neg A_p(p)$，从而可知它是假的，但如果不假设ω无矛盾性，我们不敢说它是不可证的）。

曾有人想用古典系统并借助于“理想”陈述句而直觉主义地证

明“真实”陈述句（参看 § 14），在有了（简单）无矛盾性证明以后，就 B(x) 及 ∀xB(x) 形状的“真实”陈述句而言，这种做法是有根据的，但就 ∃xB(x) 形状的“真实”陈述句而言，由上面所证明的看来，就欠根据了[1].

假设在这系统之上再加入 $A_p(\mathbf{p})$ 或 $A_q(\mathbf{q})$ 或 Consis 作为一个新公理，并重复整个过程因而依次得出一系列的系统. 可以证明如果这些系统是无矛盾的，则 ∀xA(x) 形的可证公式类是依次扩大的. 哥德尔 [1931—2] 说，只须逐次容许更高型的变元，所得到的各系统也这样(至少当假设 ω 无矛盾性时是这样). 除却我们缺乏相应的无矛盾性的证明外，这便表明了(参看 § 14)，逐次更高型的理论构作的确使所包含的原来种类的“真实”句的类增加了一些. 哥德尔[1936]又说，在更高的系统内，有无穷多个原来的可证公式具有更短的证明[2].

直到这里我们只是对我们的特殊的形式系统而获得哥德尔定理（除却最后的附注牵涉到一系列的系统外）. 现在发生一个问题，即它是否由于目前对逻辑所作的形式化有一些特点之故，是否在别的形式化之下可以避免呢？ 在下面几章内，除却补入证明哥德尔定理时所需要的引理的证明外，我们还达到一个观点，靠它可以对一般的形式系统而讨论这些问题，而这里所讨论的形式系统只不过是作为一个例子罢了（§60，§61).

---

1) 又参看俄译本附录 VII.

2) 指下述定理：设 S 为如(俄译本)附录 I 中所述的无矛盾的系统，S_1 为由它加入高层变元所得的扩张系统，并设 S_1 中自由地容许非直谓定义(参看§12；这时§81 末的谓词 $T(a)$ 便可在 S_1 内定义，因此公式 Consis，即在系统 S 内而表示 S 的无矛盾性的公式，亦可在 S_1 内证明了). 这时对于任何一个可计算函数 $\varphi(n)$，都可找出一公式 F，使得它在 S 及在 S_1 中最短的证明的长度 l 与 l_1 恒有 $l>\varphi(l_1)$.

这定理的证明首先由克累斯尔与王浩 Kreisel-Wang [1955]所公布，这里 $\varphi(n)$ 的可计算性是不重要的，系统 S_1 可换为 S 的任何一个扩张系统，只要在其中 Consis 是可证的便成，F 可取为当 l 充分大时的 F(l)，F(l) 为一公式，它与 $A_p(\mathbf{p})$ 的差异点仅在于：在 $A(a,b)$ 的定义中把“证明”字样改为“长度$\leqslant l$ 的证明”字样. 用定理 28 第一部分的证明的方法可证得，在 S 中对 F(l) 不可能有长度 $\leqslant l$ 的证明，同时，利用附录 I 的方法可证得，在 S 中公式 Consis ⊃ ∀nF(n)是可证的——俄译注.